

Funzione logaritmica e integrale generalizzato

Dopo aver studiato e tracciato il diagramma della funzione

$$f(x) = x \log x,$$

calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della curva e dall'asse delle ascisse.

* * * * *

1) Dominio di definizione

La funzione è definita per i valori positivi reali della variabile reale perché la funzione logaritmo richiede che il suo argomento sia strettamente positivo. Dunque il dominio è $A =]0; +\infty[$.

2) Simmetrie.

Osserviamo che il dominio di definizione della funzione non è simmetrico rispetto all'origine $x=0$ e dunque il diagramma della funzione non può presentare simmetria né rispetto all'origine degli assi, né rispetto all'asse delle ordinate.

3) Segno e zeri

Occorre studiare la disequazione $f(x) \geq 0$ nel dominio di definizione:

$$x \log x \geq 0$$

La base del logaritmo è il numero $e=2,718\dots$ di Nepero. Considerato che il primo fattore è positivo, deduciamo che il prodotto sarà positivo se e solo se lo è il secondo fattore.

Dalle proprietà della funzione logaritmica, sappiamo che la disuguaglianza $\log x > 0$ è soddisfatta nell'intervallo $]1; +\infty[$, mentre nell'intervallo $]0; 1[$ risulta $\log x < 0$; infine per $x=1$ la funzione logaritmo si annulla e dunque $x=1$ è anche zero della funzione in esame. Concludiamo che la funzione è negativa nell'intervallo $]0; 1[$, è positiva nell'intervallo $]1; +\infty[$ e si annulla per $x=1$.

4) Limiti ed asintoti

La frontiera del dominio è $Fr(A) = \{0; +\infty\}$ e vanno studiati i limiti in ciascuno dei punti di tale insieme.

Il limite per $x \rightarrow 0^+$ è notevole e vale zero: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$. Tuttavia, a beneficio del lettore, eseguiamo il calcolo applicando la regola di De l'Hôpital dopo aver ricondotto il limite alla forma ∞/∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-1}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

Per il secondo limite il risultato è immediato non essendo una forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Il risultato ottenuto implica che l'estremo superiore della funzione è $+\infty$ e che non esiste asintoto orizzontale. Potrebbe esistere un asintoto obliquo, ma proveremo che non esiste neanche un tale asintoto.

Occorre studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

Il valore ottenuto per il limite implica che **il diagramma della funzione non ammette asintoto obliquo.**

Conclusione: Il diagramma della funzione non ammette alcun asintoto.

5) Monotonia, massimi e minimi relativi

$$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

Dallo studio della disequazione $f'(x) > 0$ si riconosce che è soddisfatta nell'intervallo $]e^{-1}; +\infty[$, mentre nell'intervallo $]0; e^{-1}[$ risulta $f'(x) < 0$. Infine $f'(e^{-1}) = 0$.

Concludiamo che **la funzione è strettamente decrescente in ogni punto dell'intervallo $]0; e^{-1}[$, è strettamente crescente in ogni punto dell'intervallo $]e^{-1}; +\infty[$, mentre il punto $x = e^{-1}$ è di minimo relativo proprio, nonché di minimo assoluto.**

6) **Concavità, convessità e flessi.**

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Nel dominio di definizione della funzione la derivata seconda è positiva e quindi il diagramma volge la concavità verso l'alto; non vi sono punti di flesso. La funzione è convessa in tutto il dominio.

7) **Approfondimento sulle caratteristiche del diagramma per $x \rightarrow 0$.**

Considerato che nel punto $x=0$ la funzione non è definita e che per $x \rightarrow 0^+$ la funzione ammette limite finito, è opportuno stabilire come la curva del graffio si approssima al punto $(0;0)$. Un'informazione importante si ottiene studiando il limite della derivata per $x \rightarrow 0^+$ perché si riuscirà a dedurre la direzione seguita dal grafico in prossimità del punto suddetto. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x + 1) = -\infty$$

Il valore ottenuto indica che il diagramma della funzione arriva verso il punto $(0;0)$ tangenzialmente all'asse delle ordinate.

Osservazione

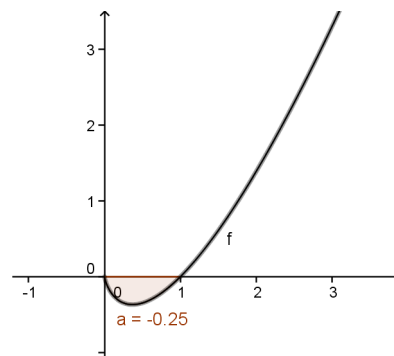
Il punto $x=0$ è di discontinuità eliminabile per la funzione e a partire dalla funzione f si può definire un'altra funzione $\varphi(x)$ continua che differisce da f solo in corrispondenza a quel punto ponendo

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]0; +\infty[\\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Concludiamo questa digressione precisando che la funzione $\varphi(x)$ è continua in tutto il suo dominio ma derivabile solo nell'intervallo $]0; +\infty[$, quindi ha lo stesso dominio di derivabilità della funzione f .

Il diagramma della funzione è riportato a lato.

Si noti che nel grafico è evidenziata anche la regione piana delimitata dall'asse delle ascisse e dal diagramma della funzione di cui ci si occuperà nel successivo paragrafo a proposito del calcolo dell'integrale.



Calcolo dell'integrale

L'integrale richiesto è generalizzato perché la funzione f non è definita per $x=0$. Si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \log x dx$$

per il quale è necessario innanzitutto calcolare l'integrale indefinito relativo; detto integrale si calcola applicando il **metodo di integrazione per parti**. Si ha:

$$\int x \log x dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \log x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

Studiamo ora il limite dell'integrale definito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{x^2}{4} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(0 - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \log \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \right] = -\frac{1}{4}$$

Avendo ottenuto per il limite un valore finito concludiamo che l'integrale generalizzato studiato converge ed il suo valore rappresenta l'area della regione piana delimitata dal diagramma della funzione e dall'asse delle ascisse limitatamente all'intervallo]0;1].

Nota per gli utenti di Geogebra

Con Geogebra si può calcolare il valore dell'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ inserendo nella

barra della formula la seguente espressione

integrale[f(x),a,b]

dove f(x) è il simbolo che è stato associato alla funzione di riferimento; diversamente, in luogo di f(x) si può scrivere per esteso la sua espressione algebrica.