

Studio completo di una funzione logaritmica e calcolo di un integrale definito

Studiare e rappresentare la funzione $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$

Calcolare l'integrale definito $\int_1^{e^{\frac{3}{2}}} f(x) dx$

Soluzione

a) Dominio- La funzione è definita per ogni valore reale diverso da zero: $A = \mathbb{R}_0$

b) La funzione è dispari perché $\forall x \in A$ risulta $f(-x) = \frac{\log|-x|}{-x} = -\frac{\log|x|}{x} = -f(x)$; pertanto il diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

c) Segno e zeri

La funzione:

- si annulla se $|x|=1$, quindi nei punti $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
- è positiva nell'insieme $] -1; 0[\cup] 1; +\infty[$ ed è negativa nell'insieme $] -\infty; -1[\cup] 0; 1[$.

d) Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti

La **frontiera** del dominio è $Fr(A) = \{-\infty; 0; +\infty\}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ma si tratta di un caso notevole ed il suo valore è zero. Tuttavia, si può studiare il limite tramite la regola di de l'Hôpital. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Analogamente risulta: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(-x)}{x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{-x}}{1} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

Dai valori ottenuti si conclude che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale sia per $x \rightarrow +\infty$, che per $x \rightarrow -\infty$.

Studio per $x \rightarrow 0$.

Poiché l'espressione della funzione per $x < 0$ è diversa dall'espressione per $x > 0$, si devono studiare separatamente i due limiti laterali.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(-x)}{x} = \frac{-\infty}{0^-} = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty$$

Si conclude che **l'asse delle ordinate è asintoto verticale** sia da destra che da sinistra.

Dai valori ottenuti per i limiti si può affermare anche che la funzione non è limitata né inferiormente, né superiormente e dunque che **$\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$** .

e) Monotonia, massimi e minimi relativi.

Per $x > 0$.

$$f(x) = \frac{\log x}{x}; \text{ la funzione derivata prima è } f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

Si riconosce che:

- $f'(x) > 0$ per $0 < x < e$; la funzione in questo intervallo è strettamente crescente;
- $f'(e) = 0$;

- $f'(x) < 0$ per $x > e$. La funzione nell'intervallo $]e; +\infty[$ è strettamente decrescente.

Si conclude che il punto $x=e$ è di massimo relativo proprio con $f(e)=e^{-1}$.

Per $x < 0$ le caratteristiche del diagramma si possono dedurre dalla simmetria rispetto all'origine degli assi. Precisiamo solo che il punto $x=-e$ è di minimo relativo proprio e risulta $f(-e)=-e^{-1}$.

f) Concavità ed eventuali flessi

Per $x > 0$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} = \dots = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

Nell'intervallo in esame si verifica

immediatamente che $f''(x) > 0$ per $x > e^{\frac{3}{2}}$,

mentre per $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ risulta $f''(x) < 0$ e

naturalmente $f''(x) = 0$ per $x = e^{\frac{3}{2}}$.

Concludiamo che nel punto $x = e^{\frac{3}{2}}$ la funzione presenta un flesso ascendente, è concava

nell'intervallo $\left]0; e^{\frac{3}{2}}\right[$ e convessa nell'intervallo

$\left]e^{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$.

Lasciamo al lettore il compito di precisare la concavità, la convessità e l'esistenza di eventuali punti di flesso per $x < 0$.

Calcolo dell'integrale definito

$$\int_1^{e^{\frac{3}{2}}} f(x) dx = \int_1^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{\log x}{x} dx = \int_1^{e^{\frac{3}{2}}} \log x \cdot D(\log x) dx = \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{8}$$

Nel grafico seguente è evidenziata la regione piana la cui area coincide con il valore dell'integrale definito calcolato.

Operatività con GeoGebra

1) Per ottenere il diagramma della funzione digitare nella barra della formula l'espressione $y = \ln(\text{abs}(x)) / x$

2) Per visualizzare nell'area del grafico $Max = e^{-1}$, con inserisci testo, digitare $Max = e^{-1}$

3) Per il calcolo dell'integrale definito digitare nella barra della formula l'espressione

$\text{Integrale}[f(x), 1, e^{(3/2)}]$

