Studio di funzione

Funzione razionale con modulo

Relativamente alla funzione

$$f(x)=\frac{x^2-|x|}{x^2-1}$$

classificarla, determinare il dominio di definizione, il segno e gli eventuali zeri, precisare l'esistenza di particolari simmetrie del suo grafico, studiare i limiti nei punti di frontiera e precisare l'esistenza di eventuali asintoti, nonché l'esistenza di eventuali punti di discontinuità; studiare la monotònia, determinare i punti di massimo e di minimo relativi o assoluti, studiare la derivabilità e la concavità e precisare se esistono punti di flesso. Rappresentare il relativo grafico.

Elaborazioni

1. **Generalità della funzione**
   a. La funzione è razionale fratta ed è definita per ogni valore reale che non annulla il denominatore. Il dominio è A=R-{-1;1}.
   b. La **funzione** è **pari** perché per ogni punto x del dominio anche -x appartiene al dominio e inoltre risulta $f(-x)=\frac{(-x)^2-|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{x^2-|x|}{x^2-1}=f(x)$, dunque il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
   c. Osserviamo che la funzione si esplicita come segue $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{x^2-1} & per \quad (x\geq 0)\wedge(x\neq 1)\\ \frac{x^2+x}{x^2-1} & per \quad (x<0)\wedge(x\neq -1)\end{cases}$,
   ed ancora $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x}{x+1} & per \quad (x\geq 0)\wedge(x\neq 1)\\ \frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{x}{x-1} & per \quad (x<0)\wedge(x\neq -1)\end{cases}$
2. **Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti**
   a. La frontiera del dominio di definizione è Fr(A)={-∞;-1;1,+ ∞}. Avendo precisato che la funzione è pari, si può limitare lo studio all'intervallo [0;+ ∞[e dedurre per simmetria le ulteriori proprietà per x<0.
   b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{1+0}=1$, quindi per la parità si ha anche $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$, dunque la retta y=1 è asintoto orizzontale per x→±∞.
   c. $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$, quindi, ancora per la parità, risulta anche $\lim_{x\to-1} f(x)=\frac{1}{2}$. I risultati di questi due limiti indicano che i punti x=-1, x=1, pur non appartenendo al dominio di definizione della funzione, sono considerati come punti di discontinuità eliminabile (cioè di terza specie).
   d. Il grafico della funzione non presenta altri asintoti oltre a quello dichiarato.
3. **Derivabilità, monotònia, ricerca di eventuali punti di massimo e di minimo relativo o assoluti**

Studio L2.mat

a. Determiniamo l'espressione della funzione derivata prima.

   i. Per x>0 e x≠1 risulta $f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$, e risulta $f'(x)>0$,(∀x>0)∧(x≠1);

   conseguentemente la funzione è strettamente crescente in ciascuno dei due intervalli]0;1[,]1;+∞[.

   ii. Per x<0 e x≠-1 risulta $f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$, e risulta $f'(x)<0$,(∀x<0)∧(x≠-1);

   conseguentemente la funzione è strettamente decrescente in ciascuno dei due intervalli] -∞;-1 [,]-1;0[.

   iii. Derivabilità nel punto x=0. Studiamo i limiti laterali della funzione derivata prima nel punto. Si ha:

   $$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)^2}=1=f'_+(0);$$

   $$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(x-1)^2}=-1=f'_-(0).$$

   Poiché i valori delle derivate destra e sinistra nel punto x=0 esistono e sono finiti, ma sono diversi tra loro, si conclude che nello stesso punto la funzione non è derivabile, pertanto il punto (0;f(0))=(0;0) è un punto angoloso per il grafico della funzione, ed in particolare le semirette tangenti destra e sinistra in detto punto, che sono rispettivamente t^+:y=x, t^-:y=-x, sono tra loro perpendicolari.

b. **Conclusione**. La funzione è derivabile in ogni punto del dominio di definizione con esclusione del punto **x=0** e dalle caratteristiche della monotonia si deduce che questo è **punto di minimo assoluto**; inoltre, la funzione è limitata superiormente ed il suo estremo superiore è Sup(f)=1/2, che però non è massimo, perché non è assunto dalla funzione in alcun punto del suo dominio.

4. **Concavità, convessità ed eventuali punti di flesso**

Determiniamo l'espressione della funzione derivata seconda.

a. Per x>0 risulta $f'(x)=(x+1)^{-2}$, da cui $f''(x)=-2(x+1)^{-2-1}\cdot 1=\frac{-2}{(x+1)^3}<0$, (∀x>0)∧(x≠1);

dunque la concavità del grafico è rivolta verso il basso (la funzione è concava) in ciascuno dei due intervalli]0;1[,]1;+∞[.

b. Per x<0 risulta $f'(x)=-(x-1)^{-2}$, da cui $f''(x)=-(-2)(x-1)^{-2-1}=\frac{2}{(x-1)^3}<0$, (∀x<0)∧(x≠-1);

dunque la concavità del grafico è rivolta verso il basso (la funzione è ancora concava) in ciascuno dei due intervalli] -∞;-1 [,]-1;0[.

c. **Conclusione**. La funzione derivata seconda è negativa in ogni punto del dominio di definizione della funzione f con esclusione del punto x=0 in cui la funzione non è derivabile e quindi non esiste neanche la derivata seconda (né alcuna derivata di ordine superiore); la concavità della funzione è rivolta verso il basso ∀x∈A ∧x≠0. Non esiste alcun punto di flesso.

5. Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1 dove sono presenti anche l'asintoto, le semitangenti nel punto (0;0) ed evidenziate altre caratteristiche grafiche.

Studio L2.mat

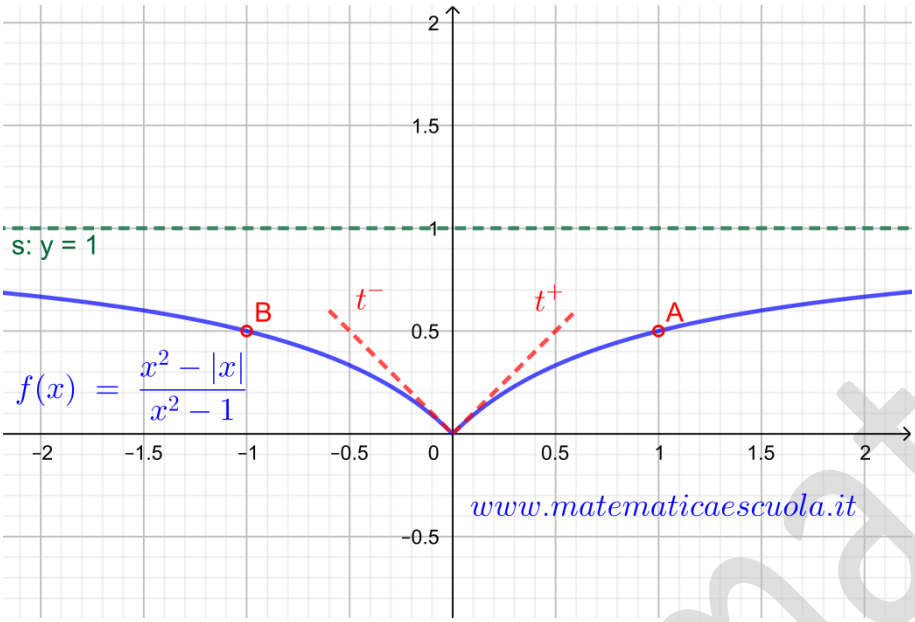

Figura 1

Studio L2.mat