Studio di funzione

Funzione logaritmica

Studio della funzione $f(x)=\frac{ln(x^2)}{x}$

Elaborazioni

1) **Dominio**- La funzione è definita per ogni x diverso da zero:D=R_0

2) La funzione è dispari perché $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D \wedge f(-x)=-f(x)$. Questa proprietà indica che la funzione ha un diagramma simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

3) **Segno e zeri**. La funzione nel suo dominio D si annulla se e solo se il numeratore della frazione è nullo, quindi $ln(x^2)=0$ e ciò si verifica per x_1=-1, x_2=1. Studiando il segno del numeratore e del denominatore si ha:

N(x)>0 $\rightarrow ln(x^2)>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow (x<-1)\vee(x>1)$; D(x) >0 $\Leftrightarrow$ x>0.

Per il segno della funzione si ha: $f(x)>0 \Leftrightarrow (-1<x<0)\vee(x>1)$; $f(x)<0 \Leftrightarrow (x<-1)\vee(0<x<1)$.

4) **Limiti** nei punti di frontiera del dominio ed eventuali **asintoti**.

La frontiera del dominio è $Fr(D)=\{-\infty;0;+\infty\}$.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x^2)}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x^2)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$; si può applicare la regola di De l'Hôpital e si ha

$\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0^+$.

Dalla simmetria del diagramma si deduce che $\lim_{x\to 0^-}\frac{ln(x^2)}{x}=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{ln(x^2)}{x}=0^-$.

Il diagramma della funzione ammette la retta x=0 (asse delle ordinate) come asintoto verticale e l'asse delle ascisse (y=0) come asintoto orizzontale.

4) **Monotonia**, **punti di massimo e di minimo relativo**

I valori ottenuti per i limiti laterali per x→0 indicano che Sup(f)=+ ∞, Inf(f)=- ∞, quindi la funzione non ammette massimo, né minimo assoluti. Possono esistere punti di massimo o di minimo relativo. Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri.

$f'(x)=\frac{2-ln(x^2)}{x^2}$; $2-ln(x^2)\geq 0 \rightarrow \frac{2-2\cdot\ln(|x|)}{x^2}\geq 0 \rightarrow \frac{2(1-\ln(|x|))}{x^2}\geq 0$;

poiché $1-\ln(|x|)\geq 0 \Leftrightarrow <0<|x|\leq e$, dunque $(-e\leq x<0)\vee(0<x\leq e)$, visto che x^2>0 nel dominio, si conclude che la funzione derivata prima è positiva per i valori di x tali che $(-e\leq x<0)\vee(0<x\leq e)$, e negativa negli intervalli

Studio L2.mat

]-∞;-e[,] e;+ ∞ [pertanto nel punto x=- e la funzione ha un minimo relativo, f(-e)=-2/e , e nel punto x= e ha un punto di massimo relativo con f(e)= 2/e.

5) **Studio della concavità** e determinazione degli **eventuali punti di flesso**

L'espressione della funzione derivata seconda è: $f''(x)=2\left[\frac{ln(x^2)-3}{x^3}\right]$. Studiamo il segno e gli zeri.

$ln(x^2)-3\geq 0 \Leftrightarrow 2\cdot\ln(|x|)\geq 3 \Leftrightarrow \ln(|x|)\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x|\geq e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(x\leq -e^{\frac{3}{2}}\right)\vee\left(x\geq e^{\frac{3}{2}}\right)$, dunque

$f''(x)=0$ nei punti $x_1=-e^{\frac{3}{2}}$, $x_2=e^{\frac{3}{2}}$;

$f''(x)>0$ negli intervalli $\left]-e^{\frac{3}{2}};0\right[$, $\left]e^{\frac{3}{2}};+\infty\right[$,

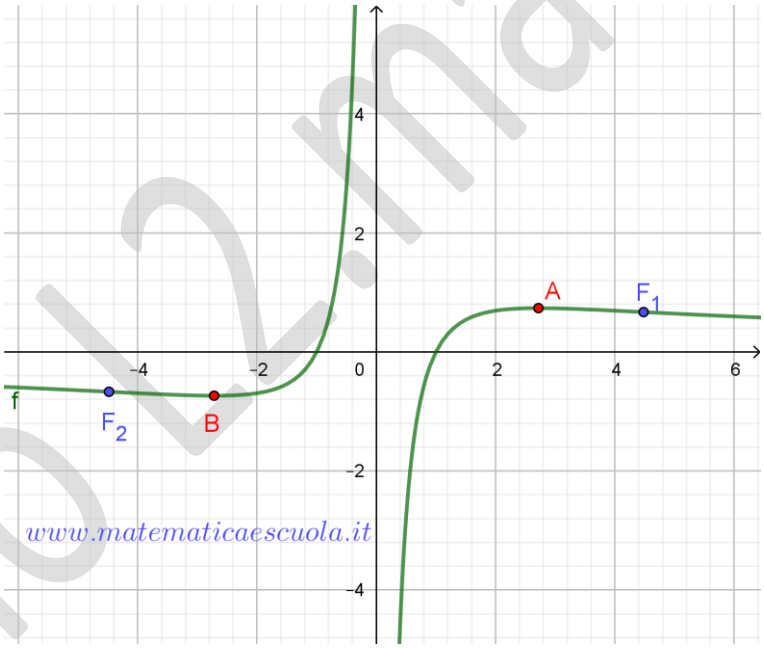
dove la funzione è convessa;

$f''(x)<0$ negli intervalli $\left]-\infty;-e^{\frac{3}{2}}\right[$, $\left]0;e^{\frac{3}{2}}\right[$,

dove la funzione è concava.

Il punti $x_1=e^{\frac{3}{2}}$, $x_2=-e^{\frac{3}{2}}$, sono entrambi di flesso ascendenti.

Il diagramma della funzione è riportato a margine con indicazione del punto A, nella cui scissa la funzione assume il massimo relativo, del punto B, nella cui ascissa la funzione assume il minimo relativo, e dei punti F_1, F_2 di flesso.



Studio L2.mat