Studio veloce di funzione

Funzione razionale fratta- Asintoti-Punti di discontinuità-Monotonia

Traccia

Considerata la funzione $f(x)=\dfrac{2x-2}{\left|x^2-1\right|}$ determinare

il dominio di definizione, il segno, i limiti nei punti di frontiera, gli asintoti, i punti di discontinuità, l'estremo inferiore e l'estremo superiore; tracciare il diagramma.

Elaborazioni

1. Dominio di definizione - La funzione è definita per tutti i valori reali che non annullano il denominatore, che si annulla per *x*=1-, *x* =1; quindi il dominio è A=R-{-1;1}.
2. Nel dominio di definizione il denominatore è positivo, pertanto il segno della funzione dipende da quello del numeratore:

   N(*x*)>0 $\rightarrow$2 *x* -2>0$\rightarrow$ *x* >1.

   Risulta : *f*(*x*)>0 per *x* >1, *f*(*x*)<0 per (*x* <1)$\wedge$ (*x* $\neq$-1).

   Nel dominio di definizione la funzione si può esplicitare come segue:

$$f(x)=\frac{2x-2}{\left|x^2-1\right|}=\frac{2(x-1)}{\left|(x-1)\right|\cdot\left|(x+1)\right|}=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & per \quad (x<-1)\vee(x>1)\\ -\dfrac{2}{x+1} & per \quad (-1<x<1)\end{cases}$$

3. La frontiera del dominio è: Fr(A)={-∞;-1;1; +∞}. Per i limiti risulta:

   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{-\infty}=0^-$

   b. $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0^-}=2\cdot(-\infty)=-\infty$

   c. $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)=\dfrac{-2}{0^+}=-2\cdot(+\infty)=-\infty$

   d. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)=-\dfrac{2}{2}=-1$

   e. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=1$

   f. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{+\infty}=0^+$

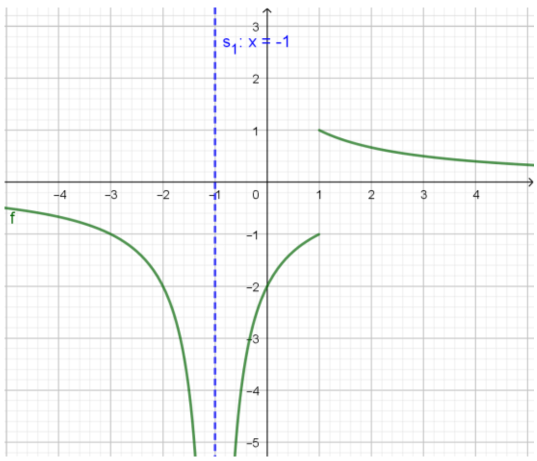

Figura 1

4. Dallo studio dei limiti si deduce che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale, la retta *x* =-1 è asintoto verticale e il punto *x* =-1 è di discontinuità di seconda specie, il punto *x* =1 è di discontinuità di prima specie e in esso la funzione presenta il salto

$$\sigma=\lim_{x\to1^+} f(x)-\lim_{x\to1^-} f(x)=1-(-1)=2$$

5. Monotonia- La funzione derivata prima esiste in ogni punto del dominio della funzione in esame ed è

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^2} & per \quad (x<-1)\vee(x>1) \\ \dfrac{2}{(x+1)^2} & per \quad (-1<x<1) \end{cases}$$

Si riconosce che la funzione è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli]-∞;-1[,]1;+ ∞[, strettamente crescente nell'intervallo]-1;1[e non ha punti di massimo né di minimo relativo.

6. Estremi della funzione: Sup(*f*)=1, Inf(*f*)=-∞.

Osservazione particolare - La funzione in esame, considerata in ciascuno degli intervalli]-∞;-1[,]1;+ ∞[,]-1;1[, coincide con una funzione omografica(1) e quindi le sue proprietà essenziali possono essere dedotte anche senza l'utilizzo dell'analisi matematica.

Il diagramma parziale della funzione è riportato in Figura 1.

(1) Ricordiamo che l'espressione algebrica di una funzione omografica è $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con la condizione ($c\neq 0$) $\wedge$($ad-bc\neq 0$).