Studio di due funzioni

Studio del grafico

Studio delle funzioni

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3$ b) $g(x)=\frac{1}{4}x^4-2|x|^3$

Elaborazioni

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3$

Dominio: R.

Proprietà particolari

La funzione è continua e dotata di derivate di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio, illimitata superiormente e limitata inferiormente; ammette un punto di minimo assoluto, due punti di flesso, dei quali uno a tangente orizzontale.

Simmetrie

La funzione non ha particolari simmetrie.

Segno e zeri

La funzione si annulla nei punti $x_1=0$, $x_2=8$; è positiva per $(x<0)\vee(x>8)$ e negativa altrove.

Limiti nei punti di frontiera del dominio

…

Monotonia, punti di massimo e/o di minimo relativi o assoluti.

La funzione derivata prima è $f'(x)=x^3-6x^2=x^2(x-6)$ e risulta $f'(x)=0$ per (x =0)$\vee$ (x=6), $f'(x)>0$ solo per x >6.

Dei due punti stazionari x =0, x=6, …

Concavità, convessità e flessi

…

Il diagramma della funzione è riportato in Fig.1.

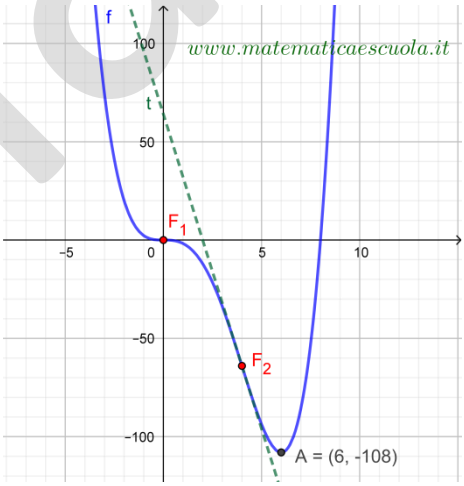

Figura 1- In figura sono evidenziati in particolare i due punti di flesso F_1, F_2, …. Le rette tangenti nei punti F_1, F_2(4;-64) sono ….

b) $g(x)=\frac{1}{4}x^4-2|x|^3$

Dominio: R.

Proprietà particolari

La funzione è pari, continua, dotata di derivate di qualsiasi ordine in ogni punto $x\neq 0$ del dominio; nel punto $x=0$ ammette solo le derivate dei primi due ordini; è illimitata superiormente e limitata inferiormente; ammette un punto di massimo relativo proprio, due punti di minimo assoluto, due punti di flesso, entrambi a tangente obliqua.

Simmetrie

La funzione é pari sussistendo l'uguaglianza $g(-x)=g(x)$, $\forall x\in R$, …

Caratteristiche della funzione

1) Poiché la funzione è pari e nell'intervallo [0;+∞[coincide con la funzione $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3$, studiata nel precedente punto (a), per simmetria possiamo determinare tutte le caratteristiche del grafico della funzione in esame possedute nell'intervallo]-∞;0] deducendole dalle proprietà possedute dalla funzione $f(x)$ nell'intervallo [0;+∞[.

2) Possiamo affermare che:

2.1) La funzione si annulla complessivamente nei punti $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=-8$.

E' positiva per …

2.2) Limiti nei punti di frontiera del dominio

La frontiera del dominio è $F_r(R)=\{-\infty;\infty\}$ e risulta

…

Deduciamo che l'estremo superiore della funzione è …

2.3) Monotonia, punti di massimo e/o di minimo relativi o assoluti.

La funzione derivata prima ha la seguente espressione

…

La funzione è strettamente crescente dove $f'(x)>0$, quindi ….

2.4) Concavità, convessità e flessi

La funzione derivata seconda per ogni $x\neq 0$ ha la seguente espressione

$$g''(x)=\begin{cases}3x^2-12x & per \quad x>0\\ 3x^2+12x & per \quad x<0\end{cases}$$

Si riconosce agevolmente che la funzione g è derivabile due volte anche nel punto $x=0$ perché

…

A questo punto, come utile esercizio, invitiamo il lettore a riconoscere che la funzione g ammette derivata di qualsiasi ordine superiore a due in ogni punto reale diverso da zero ma non ammette derivata terza (e quindi neanche le derivate successive alla terza) nel punto $x=0$.

…

i punti $x=-4$, $x=4$ sono di flesso a tangente obliqua; …

La funzione è dunque convessa …

Il diagramma della funzione è riportato in Fig.2.