Studio di tre funzioni polinomiali

Studio del grafico

Studio delle funzioni

a) $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3$ b) $f(x)=2x^3-x^2$ c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+1$

Elaborazioni

a) $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3$

Dominio: R.

Proprietà particolari

La funzione è continua e dotata di derivate di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio, è dispari, illimitata superiormente e inferiormente. La funzione ha un punto di minimo relativo proprio, un punto di massimo relativo proprio ed un punto di flesso.

Simmetrie

La funzione è dispari perché risulta f(-x)=-f(x)

…

Segno e zeri

La funzione si annulla nei punti $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$;

….

Limiti nei punti di frontiera del dominio

La frontiera del dominio è $F_r(R)=\{-\infty;\infty\}$ e risulta

$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)=\ldots$

Monotonia, punti di massimo e/o di minimo relativi.

La funzione derivata prima è $f'(x)=1-x^2$ e risulta $f'(x)>0$ nell'intervallo -1<x<1.

…

Concavità, convessità e flessi

…

Il diagramma della funzione è riportato in Fig.1.

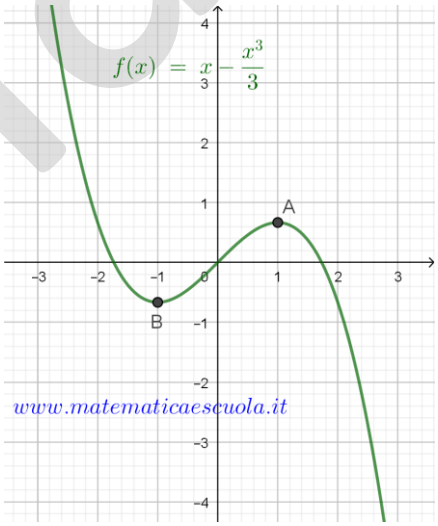

Figura 1- In figura sono evidenziati in particolare i punti del diagramma A, B le cui ascisse sono rispettivamente punti di massimo e di minimo relativo. L'origine degli assi è di flesso, nonché punto di simmetria per il diagramma.

b) $f(x)=2x^3-x^2$

Dominio: R.

Proprietà particolari

…

Simmetrie

La funzione non ha particolari simmetrie da evidenziare.

Segno e zeri

$f(x)=x^2(2x-1)$

La funzione si annulla nei punti $x_1=0$, che è doppio, …

Limiti nei punti di frontiera del dominio

…

Monotonia, punti di massimo e/o di minimo relativi.

…

Il punto x=0 è di massimo relativo proprio, con f(0)=0;

…

Concavità, convessità e flessi

…

La funzione è concava per x<1/6, convessa per …

Del diagramma della funzione sono riportate due visualizzazioni: Fig.2a, Fig.2b.

…

Fig.2a- Il diagramma è rappresentato avendo adottato la stessa unità di misura per i due assi cartesiani.

…

Fig2b- Il diagramma è rappresentato avendo adottato unità di misure diverse per i due assi cartesiani per garantire un'adeguata visualizzazione del punto di flesso.

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+1$

Dominio: R. Si riconosce che il polinomio è il quadrato di un binomio, precisamente $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^2$.

Proprietà particolari

…

Simmetrie

La funzione è pari. Ciò si riconosce immediatamente …

Segno e zeri

Il quadrato di un binomio si annulla se e solo si annulla la base, quindi …

Limiti nei punti di frontiera del dominio

La frontiera del dominio è $F_r(R)=\{-\infty;\infty\}$ …, dunque l'estremo superiore della funzione è Sup(f)=+∞.

Monotonia, punti di massimo e/o di minimo relativi.

La funzione derivata prima è .

…

Segno della derivata prima:

$f'(x)<0$ per $\left(x<-\sqrt{2}\right)\vee\left(0<x<\sqrt{2}\right)$ …;

$f'(x)>0$ …

I punti $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$, che sono anche zeri della funzione, sono di minimo assoluto; il punto $x_3=0$ è di massimo relativo proprio e si ha f(0)=1.

Concavità, convessità e flessi

…

Figura 3- La funzione è pari, presenta due punti di minimo assoluto (A e B), ….

12.mat