Studio della Funzione

$$f(x)=\frac{2x}{x^3-x^2-1}$$

Elaborazioni

1. La funzione è definita per i valori della variabile che non annullano il denominatore.

   Affrontando l'equazione $x^3-x^2-1=0$ si osserva che ammette una sola radice $x=\alpha$ per il cui valore si ha $1{,}46<\alpha<1{,}47$. Il lettore può determinare un valore approssimato di α con la precisione desiderata utilizzando il metodo di bisezione [(1)] (o con altro metodo). Il diagramma della funzione $y=x^3-x^2-1$ è approssimativamente riportato in Figura 1 dal quale si evince il punto di intersezione della curva con l'asse delle ascisse.

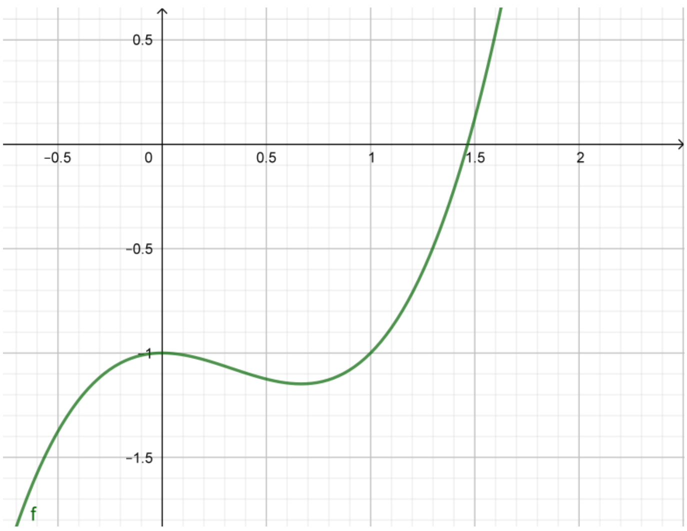

Figura 1- Diagramma della funzione y=x^3- x^2-1

2. Il diagramma della funzione ammette come **asintoto verticale la retta $x=\alpha$.** La funzione è positiva per $(x<0)\vee(x>\alpha)$. I limiti per $x\to\pm\infty$ valgono 0, quindi l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$.
3. **Monotonia e ricerca di eventuali punti di massimo e di minimo relativo**.
   a. Osservato che la funzione è illimitata superiormente e inferiormente perché risulta $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{2x}{x^3-x^2-1}=+\infty$ e $\lim_{x\to\alpha^-}\frac{2x}{x^3-x^2-1}=-\infty$, la funzione può ammettere solo punti di massimo o di minimo relativo ma non assoluto.
4. **Studio della funzione derivata prima**. Risulta $f'(x)=\frac{-2\left(2x^3-x^2+1\right)}{\left(x^3-x^2-1\right)^2}$. Si osserva che il polinomio $P(x)=2x^3-x^2+1$ ammette un solo zero che è approssimativamente $\beta=-0{,}656$ [(2)]. La funzione derivata prima si annulla solo per $x=\beta$, è positiva per $x<\beta$ e negativa in ciascuno degli intervalli $]\beta;\alpha[$, $]\alpha;+\infty[$, pertanto la funzione in esame è

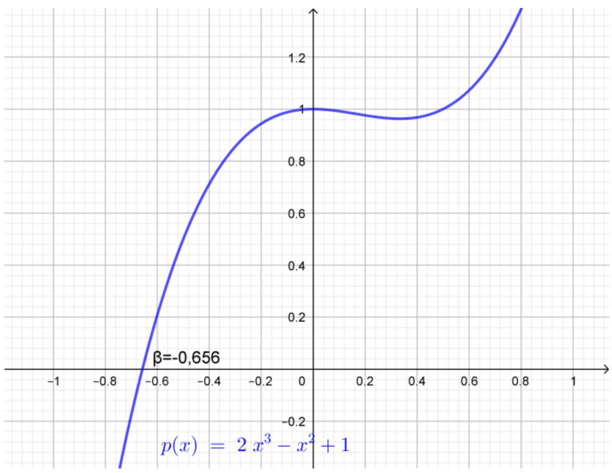

Figura 2

---

(1) Le elaborazioni relative alla ricerca del valore α con il metodo di bisezione non sono state qui riportate per necessità di semplificazione del documento. Si consiglia il lettore di eseguirli come verifica dell'affermazione fatta.
(2) Anche per la determinazione di β è stato utilizzato il metodo di bisezione.

strettamente crescente per $x<\beta$ e strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $]\beta;\alpha[$, $]\alpha;+\infty[$. Il punto $x=\beta$ è di massimo relativo proprio e risulta $f(\beta)\approx 0{,}766$. Anche per la determinazione del valore approssimato di β si è fatto ricorso al metodo di bisezione.

5. Il diagramma della funzione è riportato parzialmente in Figura 3.

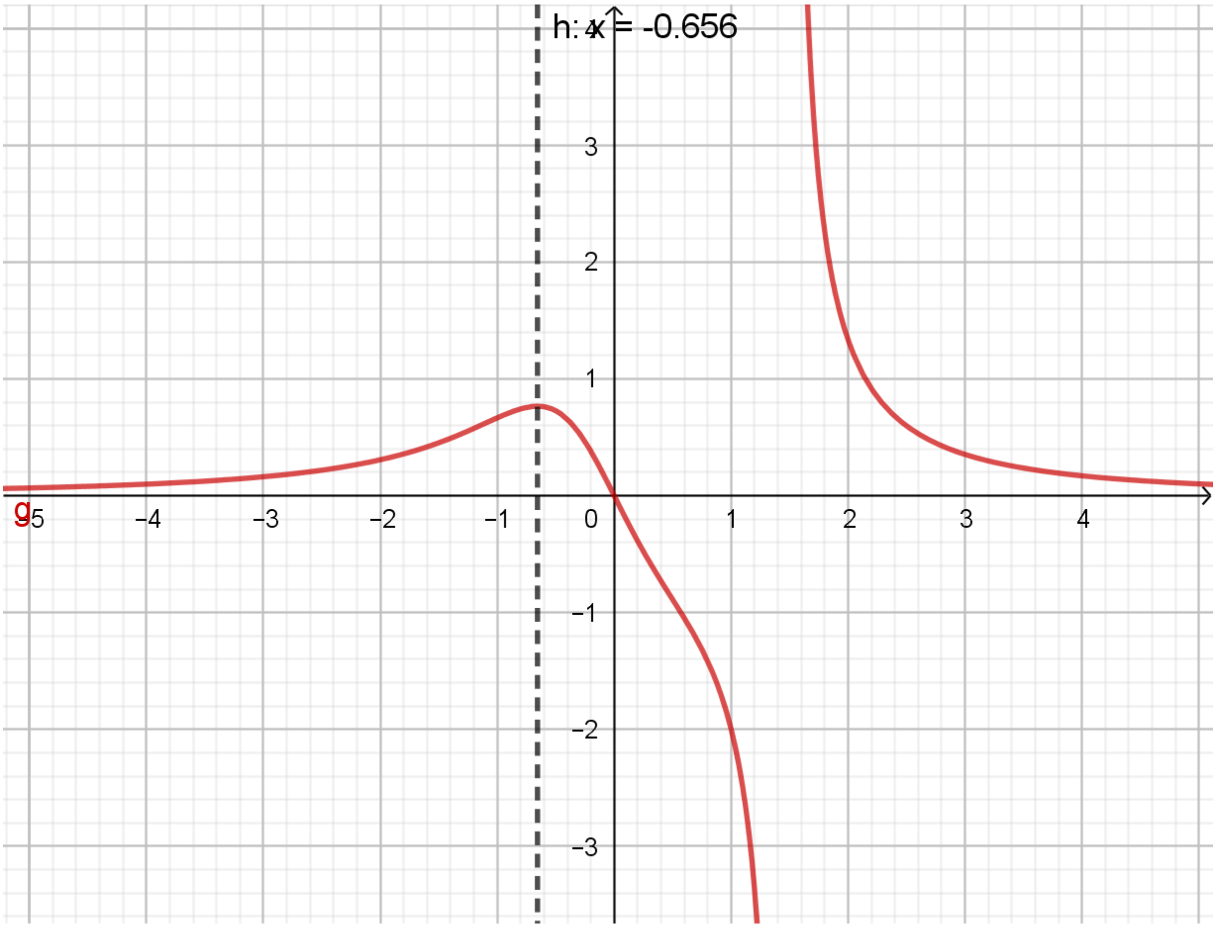

Figura 3- Grafico della funzione $f(x)=\dfrac{2x}{x^3-x^2-1}$