Studio di funzione

Della funzione $f(x) = arctg\left(x - \frac{1}{x}\right)$

determinare il dominio di definizione, precisare se è pari o dispari, studiare il segno e determinare gli eventuali zeri, precisare il comportamento agli estremi del dominio e l'esistenza di eventuali asintoti, determinandoli in caso affermativo. Studiare la monotonia, la concavità e la convessità, determinare gli eventuali punti di flesso e il codominio.

Elaborazioni

1. La funzione è definita per ogni x reale diverso da zero: D=R-{0}.
2. $\forall x \neq 0$ risulta $f(-x) = arctg\left(-x - \frac{1}{-x}\right) = arctg\left(-\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = -arctg\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$, quindi la funzione è dispari, per cui il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi.
3. Tenute presenti le proprietà della funzione elementare $\varphi(x) = arctg(x)$ si può già affermare che la funzione è limitata e che il suo codominio sarà un sottoinsieme dell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Per quanto riguarda il segno e gli eventuali zeri studiamo la disuguaglianza

   $f(x) \geq 0$, cioè $arctg\left(x - \frac{1}{x}\right) \geq 0$, equivalente alla seguente $x - \frac{1}{x} \geq 0$, che riduciamo alla forma $\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$. Per la disparità precisata limitiamo lo studio ad x>0; dai risultati ottenuti dedurremo il segno per x<0.

   Poiché $x^2 - 1 \geq 0$ ha come soluzioni $(x \leq -1) \vee (x \geq 1)$, il segno della frazione sarà negativo per $0 < x < 1$ e positivo per $x > 1$; nei punti x=-1, x=1 la frazione si annulla.

   Per quanto precede possiamo affermare che $f(x) > 0$ per $(-1 < x < 0) \vee (x > 1)$, $f(x) < 0$ per $(x < -1) \vee (0 < x < 1)$, $f(x) = 0$ nei punti $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

4. Studio dei limiti agli estremi del dominio
   a. $\lim_{x \to +\infty} arctg\left(x - \frac{1}{x}\right) = arctg\left(+\infty - \frac{1}{+\infty}\right) = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ e quindi, per la disparità, $\lim_{x \to -\infty} arctg\left(x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$. La retta $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e la retta $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
   b. $\lim_{x \to 0^+} arctg\left(x - \frac{1}{x}\right) = arctg\left(0 - \frac{1}{0^+}\right) = arctg(0 - \infty) = -\frac{\pi}{2}$
   c. $\lim_{x \to 0^-} arctg\left(x - \frac{1}{x}\right) = arctg\left(0 - \frac{1}{0^-}\right) = arctg(0 + \infty) = \frac{\pi}{2}$

Nel punto x=0, che ricordiamo non appartiene al dominio di definizione, la funzione presenta una discontinuità di terza specie con salto $\sigma(f)=\lim_{x\to0^+} f(x)-\lim_{x\to0^-} f(x)=-\pi$.

5. Monotonia - La funzione derivata prima è $f'(x)=\frac{1}{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ldots=\frac{x^2+1}{x^2+\left(x^2-1\right)^2}$,

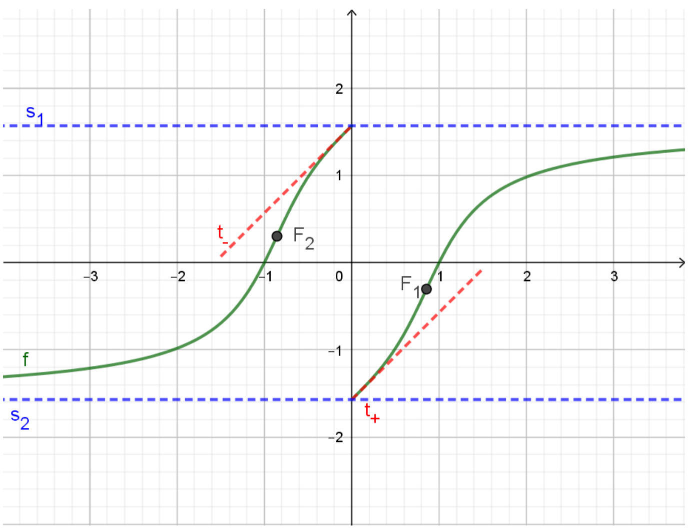
   definita per ogni $x\neq0$; dunque la funzione in esame è derivabile in tutto il dominio di definizione. Osserviamo che per ogni x del dominio risulta $f'(x)>0$, quindi la funzione non ha punti di massimo o di minimo relativo ed è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli]-∞;0[,]0;+∞[.

   Al fine di conoscere meglio quale sia l'andamento del grafico della funzione per $x\to0$ è opportuno studiare i limiti laterali della funzione derivata prima in detto punto. Risulta:

   $\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+1}{x^2+\left(x^2-1\right)^2}=1=f'_-(0)$, ed anche $\lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+1}{x^2+\left(x^2-1\right)^2}=1=f'_+(0)$

   Il diagramma della funzione ammette come semitangente sinistra nel punto $A\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ la semiretta $t_-: y=x+\frac{\pi}{2}$ e come semitangente destra nel punto $B\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)$ la semiretta $t_+: y=x-\frac{\pi}{2}$.

6. Concavità, convessità, eventuali flessi
   a. Da $f'(x)=\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$ si ricava la seguente espressione algebrica per la derivata seconda $f''(x)=\frac{-2x\left(x^4+2x^2-2\right)}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$, che esiste in ogni del dominio della funzione in esame.
   b. Si riconosce che la derivata seconda si annulla solo nei punti $x_1=-\sqrt{\sqrt{3}-1}\approx-0{,}8556$, $x_2=\sqrt{\sqrt{3}-1}\approx0{,}8556$ che sono punti di flesso perché dallo studio del segno della derivata seconda si riconosce che $f''(x)>0$ per $\left(x<-\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)\vee\left(0<x<\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$, dove la funzione è convessa, e $f''(x)<0$ per $\left(-\sqrt{\sqrt{3}-1}<x<0\right)\vee\left(x>\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$, dove la funzione è concava.



7. Dallo studio eseguito si può concludere che il codominio della funzione è l'intervallo aperto $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.