Studio di funzione

$$f(x) = arcsen\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Elaborazioni

1) Dominio: R
2) La funzione è composta e in tutto il suo dominio è continua e limitata perché composta con due funzioni continue e limitate.
3) Segno e zeri: $f(x)=0$ per x=1, x=-1

   La funzione è positiva $f(x)>0$ per $(x<-1)\vee(x>1)$ e negativa per $(-1<x<1)$.

4) La funzione è pari: $f(-x)=f(x), \forall x \in R$, quindi il suo diagramma è simmetrico rispetto all'asse y.
5) Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti

$$\lim_{x\to\pm\infty} arcsen\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} arcsen\left(\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

   La retta $y=\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per x→+∞ e per x→-∞.

6) Monotonia, massimi e minimi relativi e assoluti; estremi della funzione.

   La funzione derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-1\right)^2}}{\left(x^2+1\right)}} \cdot \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{|x|\left(x^2+1\right)} \text{ da cui}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & per \quad x>0 \\ -\frac{2}{x^2+1} & per \quad x<0 \end{cases}$$

   La funzione non è derivabile nel punto x=0 ; le derivate destra e sinistra nel punto sono rispettivamente $f_+'(0)=2$, $f_-'(0)=-2$. Il punto $A(0; f(0)) = A\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$ è angoloso.

   Risulta $f'(x)>0$ per x>0 e $f'(x)<0$ per x<0, dunque la funzione è strettamente crescente per x>0 e strettamente decrescente per x<0. Il punto x=0 è di **minimo assoluto**, con $f(0)=$ $arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$. La funzione non ammette massimo ed il suo estremo superiore è **Sup(*f*)=π/2**.

   Semitangenti nel punto angoloso - Le due semitangenti hanno equazioni

$t^+ : y - f(0) = f'_+(0)(x-0) \rightarrow t^+ : y = 2x - \frac{\pi}{2}$ (semitangente destra).

$t^- : y - f(0) = f'_-(0)(x-0) \rightarrow t^- : y = -2x - \frac{\pi}{2}$ (semitangente sinistra);

Comandi in Geogebra per tracciare una parte delle semitangenti:

Curva[t, 2t-Pi/2, t, 0, 0.7], per la semitangente destra;

Curva[t, -2t-Pi/2, t,-0.7,0], per la semitangente sinistra:

7) Concavità ed eventuali flessi

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} & per \quad x > 0 \\ \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} & per \quad x < 0 \end{cases}$$

Per ogni x≠0 risulta $f''(x) < 0$ e non vi sono punti di flesso. La funzione è concava per ogni x≠0.

Segue il diagramma della funzione