Studio di funzione[1]

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x+1}}$$

Elaborazioni

Dominio - La funzione è trascendente esponenziale mista ed è definita in $D = R - \{-1\}$

Segno e zeri - Nel dominio di definizione la funzione si annulla nel punto x=0, è positiva per x>0 e negativa altrove.

Limiti nei punti di **frontiera,** asintoti, **punti di discontinuità**.

La frontiera del dominio è : $F_r(D) = \{-\infty; -1; +\infty\}$

$\lim\limits_{x\to -1^+} xe^{\frac{1}{x+1}} = -1\cdot e^{\frac{1}{0^+}} = -1\cdot e^{+\infty} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} xe^{\frac{1}{x+1}} = -1\cdot e^{\frac{1}{0^-}} = -1\cdot 0^+ = 0^-$, dunque la retta x=-1 è asintoto verticale da destra.

Proviamo che esiste un asintoto obliquo per x→+∞ e per x→-∞.

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{x+1}} = +\infty\cdot e^0 = +\infty ;\ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = 1 = m ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - 1}{\frac{1}{x+1}} \cdot \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1\cdot 1 = 1^{(2)}.$$

Si riconosce immediatamente che risulta anche $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x+1}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x) - x\right) = 1$, per cui si conclude che la retta s:y=x+1 è asintoto obliquo per il diagramma della funzione per x→+∞ e per x→-∞.

Dai valori ottenuti nello studio dei limiti $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ si evince che il punto x=-1 è di discontinuità di seconda specie.

Monotonìa, **punti di massimo e di minimo relativo, estremi della funzione**

La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio e risulta

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+1}} + xe^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}$$

Si riconosce che $f'(x) > 0\ \forall x \in D$ e quindi la funzione non presenta punti di massimo, né di minimo relativo. La funzione è strettamente crescente in ciascuno dei due intervalli]- ∞;-1[,]-1; +∞[.

---

[1] Esercizio assegnato nella prova d'esame di Matematica nel Corso di Laurea in Fisica il 17-07-2012 a Lecce

[2] Si ricordi il limite notevole $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Tenendo presenti i valori ottenuti nello studio dei limiti nei punti di frontiera si conclude che l'estremo superiore della funzione è +∞ e l'estremo inferiore è -∞.

Concavità, convessità ed eventuali punti di flesso

La funzione derivata seconda è $f''(x)=e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{(-x-2)}{(x+1)^4}$ ed esiste ∀x∈D; si osserva che si annulla nel punto x=-2, è positiva per x<-2 ed è negativa altrove nel dominio. Il punto x=-2 è di flesso discendente, con $f(-2)=-2e^{-1}$. La funzione è convessa per x<-2 e concava per x>-2.

Approfondimento - Andamento del grafico per x→-1⁻.

Studiando il limite della derivata prima per x→-1⁻ si scopre un'importante caratteristica del diagramma della funzione.

$$\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=e^{-\infty}\cdot\frac{1}{0^+}=0\cdot(+\infty)$$

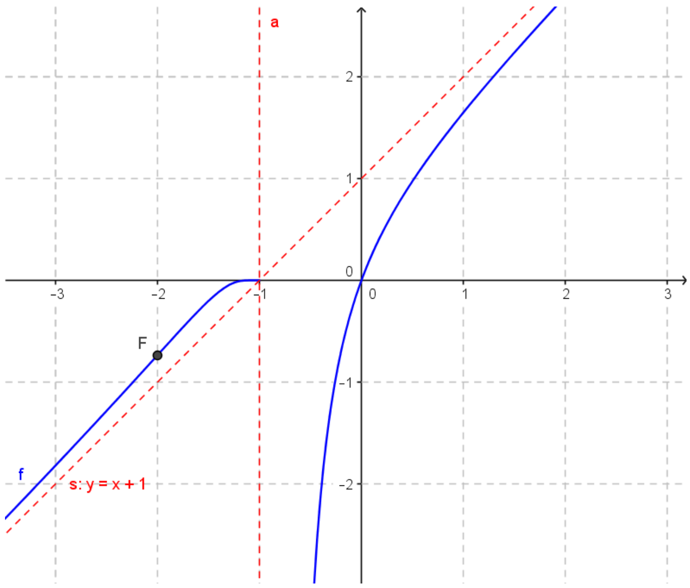
La forma è indeterminata. Osserviamo che il limite si può studiare ricorrendo al teorema sul limite del prodotto e applicando la regola di de l'Hôpital. Precisamente poniamo

$$\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-1^-}\left(x^2+x+1\right)\cdot\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=1\cdot\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$$

e per il limite residuo ricorriamo al cambio di variabile ponendo $\frac{1}{x+1}=y$. Per $x\to-1^-$ risulta $y\to-\infty$, quindi si deve studiare il limite

$$\lim_{y\to-\infty} e^y\cdot y^2=\lim_{y\to-\infty}\frac{y^2}{e^{-y}}\overset{H.}{=}\lim_{y\to-\infty}\frac{2y}{-e^{-y}}\overset{H.}{=}$$
$$\lim_{y\to-\infty}\frac{2}{e^{-y}}=0^+$$

Concludiamo che $\lim_{x\to-1^-} f'(x)=0^+$.



Il valore ottenuto, tenendo anche presente il risultato del limite $\lim_{x\to-1^-} f(x)=0^-$, permette di affermare che il diagramma della funzione si approssima al punto (-1;0) con la semitangente sinistra che tende ad assume la posizione orizzontale al di sotto dell'asse delle ascisse.

Il diagramma della funzione è a margine.