# Esercitazione sulle progressioni aritmetiche

**Es3**-Una progressione aritmetica ha ragione $d$=0,5 e la somma dei suoi primi otto termini è 62.

Quesiti

1) Calcolare i primi otto termini della progressione.
2) Determinare la media aritmetica dei primi otto termini e verificare che questa coincide con la semisomma dei termini centrali $a_4$ e $a_5$.

**Es4**-Le misure dei lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica.

Quesiti

1) Trovare la relazione tra le misure dei lati e la ragione della progressione.
2) Determinare le misure dei lati del triangolo rettangolo avente area 24cm$^2$.
3) Riconoscere che al variare della ragione si ottengono triangoli rettangoli tra loro simili.
4) Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta e calcolare il rapporto tra l'area del corrispondente cerchio e l'area del triangolo in cui lo stesso è inscritto.

**Es5**- In una progressione aritmetica si sa che $a_8 = 4a_5$ e la ragione $d = 4$. Determinare $n$ sapendo che $S_n = 60$.

## Soluzioni

### Es3

1) Tenendo presente la formula per il calcolo della somma dei primi $n$ termini di una progressione aritmetica $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ e l'espressione di $a_8$ in funzione di $a_1$, $a_8 = a_1 + 7d$, sussiste il sistema

$$\begin{cases} S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 62 \\ a_8 = a_1 + 7d \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} 2(a_1 + a_8) = 31 \\ a_8 = a_1 + 7 \cdot 0,5 = a_1 + 3,5 \end{cases},$$

dal quale si ricava l'equazione di primo grado

$2\left(a_1 + \left(a_1 + 3,5\right)\right) = 31$, che risolta fornisce $a_1 = \left(\frac{31}{2} - 3,5\right) \cdot \frac{1}{2} = 6$.

I primi otto termini della progressione sono dunque

$a_1 = 6$, $a_2 = 6,5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 7,5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 8,5$, $a_7 = 9$, $a_8 = 9,5$

2) La media aritmetica dei primi otto termini è

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{8} a_i}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{a_1 + a_8}{2} = \frac{6+9,5}{2} = 7,75$$

Determiniamo ora la semisomma dei termini centrali $a_4$ e $a_5$.

$$\frac{a_4 + a_5}{2} = \frac{7,5+8}{2} = 7,75$$

Come si vede il valore ottenuto coincide con la media aritmetica dei primi motto termini.

Osservazione

La coincidenza della semisomma $\frac{a_4 + a_5}{2}$ con la media aritmetica dei primi otto termini non è casuale. In effetti sussiste il seguente

**Teorema**

In una progressione aritmetica di *n* termini, la somma dei termini estremi e di due qualsiasi altri termini equidistanti dagli estremi è costante e la media aritmetica di tutti i termini è uguale alla metà della suddetta costante. Se il numero dei termini è dispari il valore del termine centrale coincide anche con la media aritmetica degli *n* termini.

*** ***

**Es4-**

1) Indichiamo con *x* la misura del cateto maggiore e *d* la ragione. Il cateto minore misura *x-d* e l'ipotenusa *x+d*. Considerato che le misure dei lati devono verificare la relazione pitagorica, *x* e *d* devono verificare l'equazione

$(x-d)^2 + x^2 = (x+d)^2$, che semplificata diventa $x^2 - 4dx = 0$,

le cui radici sono $x_1 = 0$, $x_2 = 4d$.

Per ottenere triangoli non degeneri deve risultare *x-d*>0, nonché *d*>0 e quindi la radice $x_1 = 0$ non è accettabile. Rimane *x*=4*d*. Pertanto, fissato il valore *d* della ragione, le misure dei lati del triangolo devono essere *x-d*=3*d*, 4*d*, *x+d*=5*d*.

2) L'area S del triangolo rettangolo si può ottenere con il semiprodotto delle misure dei due cateti, quindi

$$S = \frac{3d \cdot 4d}{2} = 6d^2. \qquad (*)$$

Dovendo essere S=24cm$^2$, sarà $6d^2 = 24$, da cui $d = 2cm$.

Le misure dei lati del triangolo sono 6cm, 8cm, 10cm.

3) Osserviamo che le misure dei lati del generico triangolo rettangolo con i lati in progressione aritmetica sono proporzionali al valore della ragione *d* della progressione; ciò implica che fissati due valori positivi diversi per la ragione, siano $d_1$, $d_2$, le misure dei lati dei corrispondenti triangoli sono $3d_1$, $4d_1$, $5d_1$, per il primo e $3d_2$, $4d_2$, $5d_2$,per il secondo. Si riconosce immediatamente che i rapporti dei corrispondenti lati sono costanti. Infatti:

$3d_1 : 3d_2 = 4d_1 : 4d_2 = 5d_1 : 5d_2 = d_1 : d_2$

e dunque i due triangoli sono simili per il terzo criterio di similitudine.

4) La misura del raggio *r* della circonferenza inscritta si determina tramite il rapporto tra l'area e il semiperimetro del triangolo. Il semiperimetro del triangolo in funzione della corrispondente ragione *d* è $p=(3d+4d+5d):2=6d$. Tenendo presente la (*) per l'area S del triangolo deduciamo che

$$r = \frac{S}{p} = \frac{6d^2}{6d} = d$$ ( la circonferenza ha come misura del raggio il valore della ragione)

Il rapporto tra l'area del cerchio e quella del triangolo in cui lo stesso è inscritto vale

$$\frac{\pi r^2}{S} = \frac{\pi d^2}{6d^2} = \frac{\pi}{6} = 0,523598... \approx 52,4\%$$

*** ***

**Es5**

Sappiamo che $a_8 = a_5 + (8-5)d$ e dalla relazione $a_8 = 4a_5$, essendo $d=4$, deduciamo l'uguaglianza $a_5 + (8-5)d = 4a_5$, quindi $3a_5 = 3d$, per cui $a_5 = d = 4$.

Calcolo di $n$ tale che $S_n = 60$.

Ricordiamo che la somma dei primi n termini vale $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ e poiché

$a_1 = a_5 + (1-5)d = d - 4 \cdot d = -3d$, e $a_n = a_5 + (n-5)d = d + (n-5)d = (n-4)d$, deduciamo che

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2} \cdot \left(-3d + (n-4)d\right) = \frac{n(n-7)d}{2} = 2n(n-7).$$

Pertanto *n* verifica l'equazione

$2n(n-7) = 60$, cioè $n^2 - 7n - 30 = 0$. Le due radici di quest'equazione sono $n_1 = -3$, $n_2 = 10$. Evidentemente il primo valore non è accettabile e quindi deve essere $n=10$.