Studio di una successione

Progressione geometrica e limite delle somme parziali

Data la successione di termine generale $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ risolvere i quesiti che seguono.

Q_1- Riconoscere che la successione è una progressione geometrica e determinarne la ragione.

Q_2- Calcolare la somma S_n dei primi n termini e studiare il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Q_3- Riconoscere che la successione estratta dei termini di posto dispari e quella estratta dei termini di posto pari sono ancora progressioni geometriche che hanno uguale ragione. Esprimere la somma parziale S'_n degli n termini della progressione dei termini di posto dispari e la somma S''_n degli n termini della progressione dei termini di posto pari. Studiare il limite per $n\to+\infty$ delle due somme parziali e confrontare i risultati ottenuti con quello ottenuto nel precedente quesito Q_2.

Soluzione

Q_1- Si riconosce agevolmente che la successione in esame è geometrica. I primi termini della successione sono:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \qquad a_2 = +\frac{1}{4}, \qquad a_3 = -\frac{1}{8}, \ldots$$

Per i termini a_{n-1} , a_n, si ha:

$$a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}a_{n-1} \qquad (1)$$

Dall'espressione del termine generale a_n tramite il termine a_{n-1} si riconosce che la successione è geometrica e che la sua ragione è $q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2}$.

Q_2- La somma dei primi n termini della successione è

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = -\frac{1}{3}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Studio del limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = -\frac{1}{3}.$$

Q$_3$- La successione estratta dei termini di posto dispari è quella il cui termine generale è

$$a_{2k-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = -2\left(\frac{1}{4}\right)^k, \text{ con k=1,2,3,…}$$

Si riconosce che la successione è ancora una progressione geometrica che ha ragione $q=\frac{1}{4}$. Infatti possiamo scrivere

$$a_{2(k+1)-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2(k+1)-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)\left[-2\left(\frac{1}{4}\right)^k\right] = \frac{1}{4}a_{2k-1}$$

Analogamente, la successione estratta dei termini di posto pari ha termine generale

$$a_{2k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k, \text{ con k=1,2,3,….}$$

Dimostriamo che si tratta ancora di una progressione geometrica avente ragione $q=\frac{1}{4}$. Infatti si ha:

$$a_{2(k+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2(k+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}a_{2k}$$

Calcolo delle somme dei primi n termini.

Per la successione estratta dei termini di posto dispari si ha:

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} -2\left(\frac{1}{4}\right)^k = -2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=$$

$$-2\left(\frac{1}{4}\right)\left[1+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

Studiando il limite per n→+∞ si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = -\frac{2}{3}.$$

Per la successione estratta dei termini di posto pari si ha:

$$S''_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

Passando allo studio del limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} S''_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{3}$$

Confrontando i valori ottenuti per gli ultimi due limiti con il valore ottenuto per il limite nel precedente quesito Q_2 si riconosce che la somma degli ultimi due è uguale al primo limite:

$$\lim_{n \to +\infty} S'_n + \lim_{n \to +\infty} S''_n = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Il risultato si giustifica poiché la somma delle due successioni estratte rappresenta proprio la successione originaria[1].

Vogliamo far presente che a partire dalla successione numerica $(a_n)_{n \in N_0}$, la successione il cui termine generale è la somma parziale n-sima $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ è detta serie associata alla successione. Questa particolare successione si indica anche in uno dei seguenti modi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Se la successione delle somme parziali $(S_n)_{n \in N_0}$ ammette limite si dice che la serie è regolare; in particolare se la successione ammette limite finito si dice che la serie è convergente, se ammette limite infinito, si dice che la serie è divergente, positivamente o negativamente, a seconda che il limite sia $+\infty$ o $-\infty$. Se la successione delle somme parziali non ammette limite si dice che la serie è oscillante o indeterminata.

---

[1] A beneficio del lettore ricordiamo che sussiste il seguente teorema sulle serie numeriche.

Teorema. Date due serie numeriche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ entrambe convergenti, se α e β sono rispettivamente le somme delle due serie, allora la serie somma $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ è convergente e la sua somma è $\alpha + \beta$.