

## Applicazioni del Principio di Induzione

Verificare che sussistono le uguaglianze seguenti.

$$1)- \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Somma delle prime  $n$  potenze di 2.

$$2)- \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Somma dei primi  $n$  numeri naturali dispari.

$$3)- \sum_{i=1}^n (2i) = n(n+1), \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Somma dei primi  $n$  numeri naturali pari positivi.

$$4)- \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \text{ con } n \in \mathbb{N}_0$$

Somma dei quadrati dei primi  $n$  numeri naturali positivi

$$5) \sum_{i=1}^n 5^{i-1} = \frac{5^n - 1}{4}, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Somma delle prime  $n$  potenze di 5.

$$6) \sum_{i=1}^n (2i)^2 = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1), \text{ con } k \in \mathbb{N}_0$$

Somma dei quadrati dei primi  $n$  numeri pari positivi.

### Dimostrazioni

$$1) \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1, \text{ con } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

**Prima parte:** verifichiamo che l'uguaglianza sussiste per  $n=1$ .

Dal primo membro si ha  $\sum_{i=1}^1 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ .

Dal secondo membro si ha  $2^n - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Dunque l'uguaglianza è verificata per  $n=1$ .

**Seconda parte**

Supponiamo che l'uguaglianza (1) sussista per  $n=k$  e facciamo vedere che sussiste anche per  $n=k+1$ .

Sia dunque vera l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^k 2^{i-1} = 2^k - 1 \quad (a)$$

Occorre provare che sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = 2^{k+1} - 1 \quad (b)$$

**Dim.** Esplicitiamo il primo membro della (b).

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \left( \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \right) + 2^{(k+1)-1} = \left( \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \right) + 2^k \quad (b.1)$$

La somma tra parentesi tonde rappresenta il primo membro della (a) che può essere sostituito con il secondo membro della stessa uguaglianza. Si ha

$$\left( \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \right) + 2^k = (2^k - 1) + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Poiché il valore ottenuto coincide con il secondo membro della (b) si conclude che anche la (b) è vera.

C.V.D.

\*\*\* \*\*

## 2) Somma dei primi $n$ numeri dispari

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \quad (2)$$

**Prima parte:** verifichiamo che l'uguaglianza sussiste per  $n=1$ .

Dal primo membro si ha  $\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ .

Dal secondo membro si ha  $1^2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$

Dunque l'uguaglianza è verificata per  $n=1$ .

### Seconda parte

Supponiamo che l'uguaglianza (2) sussista per  $n=k$  e facciamo vedere che sussiste anche per  $n=k+1$ .

Sia dunque vera l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2, k \in N \quad (a)$$

Occorre provare che sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2, k \in N \quad (b)$$

Sviluppiamo il primo membro della (b)

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \left( \sum_{i=1}^k (2i-1) \right) + (2(k+1)-1) = \left( \sum_{i=1}^k (2i-1) \right) + (2k+1)$$

a questo punto utilizziamo l'uguaglianza (a), che sappiamo essere vera per  $n=k$ ;

$$\left( \sum_{i=1}^k (2i-1) \right) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

Abbiamo ottenuto come risultato il secondo membro della (b). Concludiamo che sussiste anche la (b).  
C.V.D.

\*\*\* \*\*

### 3) Somma dei primi $n$ numeri pari positivi

$$\sum_{i=1}^n (2i) = n(n+1), \text{ con } n \in N \quad (3)$$

**Prima parte:** verifichiamo che l'uguaglianza sussiste per  $n=1$ .

Dal primo membro si ha  $\sum_{i=1}^1 (2i) = 2 \cdot 1 = 2$ .

Dal secondo membro si ha  $1(1+1) = 2$

Dunque l'uguaglianza è verificata per  $n=1$ .

#### Seconda parte

Supponiamo che l'uguaglianza (3) sussista per  $n=k$  e facciamo vedere che sussiste anche per  $n=k+1$ .

Sia dunque vera l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^k (2i) = k(k+1), k \in N \quad (a)$$

Occorre provare che sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i) = (k+1)(k+2), k \in N \quad (b)$$

Sviluppiamo il primo membro della (b) tenendo conto della validità della (a).

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i) = \left( \sum_{i=1}^k (2i) \right) + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

Abbiamo ottenuto il secondo membro della (b). Concludiamo che anche la (b) è verificata. C.V.D.

\*\*\* \*\*

#### 4) Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali positivi

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \text{ con } n \in N_0 \quad (4)$$

**Prima parte:** verifichiamo che l'uguaglianza sussiste per  $n=1$ .

Dal primo membro si ha  $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$ .

Dal secondo membro si ha  $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$

Dunque l'uguaglianza è verificata per  $n=1$ .

#### Seconda parte

Supponiamo che l'uguaglianza (3) sussista per  $n=k$  e facciamo vedere che sussiste anche per  $n=k+1$ .

Sia dunque vera l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1), \text{ con } k \in N_0 \quad (a)$$

Occorre provare che sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1), \text{ con } k \in N_0 \quad (b)$$

Sviluppiamo il primo membro della (b) tenendo conto della validità della (a).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \left( \sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] = \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6). \end{aligned}$$

A questo punto proviamo che il trinomio di secondo grado residuo si può scomporre nel prodotto di due fattori di primo grado. Infatti,

$$2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 4k + 3k + 6 = 2k(k+2) + 3(k+2) = (k+2)(2k+3)$$

per cui si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

Il risultato ottenuto coincide con il secondo membro della (b), dunque l'uguaglianza è vera. C.V.D.

\*\*\* \*\*

$$5) \sum_{i=1}^n 5^{i-1} = \frac{5^n - 1}{4}, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Seguire il procedimento applicato nell'esercizio 1)

\*\*\* \*\*

$$6) \sum_{i=1}^n (2i)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1), \text{ con } k \in \mathbb{N}_0$$

Per la dimostrazione della proprietà utilizziamo la proprietà della somma dei quadrati dei primi  $n$  numeri naturali positivi, espressa dalla (4). Infatti possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^n (2i)^2 = \sum_{i=1}^n (4i^2) = 4 \left( \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \quad \text{per la (4)}$$

$$4 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \text{ C.V.D.}$$