Studio di una successione definita per ricorrenza

Considerata la successione il cui termine generale è

$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 1$, con $n \geq 1$, intero,

risolvere i seguenti quesiti.

1) Con $a_1=2$, scrivere i primi cinque termini.
2) Precisare il tipo di successione che si ha con $a_1=4$.
3) Con $a_1 \neq 0$ e $a_1 \neq 4$ determinare l'espressione generale di a_n in funzione di a_1.
4) Nelle ipotesi indicate nel precedente punto 3) dimostrare che la successione è convergente e determinare il valore del limite cui tende.

Elaborazioni

1) $a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1 + 1 = \frac{3}{4}\cdot 2 + 1 = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{4}a_2 + 1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2} + 1 = \frac{23}{8}$$

$$a_4 = \frac{3}{4}a_3 + 1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{23}{8} + 1 = \frac{101}{32}$$

$$a_5 = \frac{3}{4}a_4 + 1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{101}{32} + 1 = \frac{303+128}{128} = \frac{431}{128}$$

Con l'aiuto del foglio elettronico si possono determinare velocemente i primi n termini della successione una volta implementate le operazioni da eseguire. Nella tabella a margine figurano i primi dieci termini, nonché a_{20} e a_{30}.

n	a_n	a_{n+1}
1	2	2,5
2	2,5	2,875
3	2,875	3,15625
4	3,15625	3,3671875
5	3,3671875	3,525390625
6	3,525390625	3,644042969
7	3,644042969	3,733032227
8	3,733032227	3,79977417
9	3,79977417	3,849830627
10	3,849830627	3,887372971
…	…	…
20	3,991543435	3,993657576
…	…	…
30	3,999523781	3,999642836

2) Con $a_1=4$ la successione è costante; dunque $a_n=4$.

3) Dalla definizione del termine generale $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 1$ segue

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1 + 1$$

$$a_3 = \frac{3}{4}a_2 + 1 = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}a_1 + 1\right) + 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 a_1 + \frac{3}{4} + 1$$

$$a_4 = \frac{3}{4}a_3 + 1 = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 a_1 + \frac{3}{4} + 1\right) + 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 a_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1$$

$$a_5 = \frac{3}{4}a_4 + 1 = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 a_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1\right) + 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 a_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1$$

e con n>5 si ha

$$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 1 = \ldots = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} a_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1$$

Osserviamo ora che dalla nota relazione

$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, valida con $q \neq 1$,

possiamo scrivere

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1 = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}} = 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right),$$

quindi, l'espressione del termine generale della successione può assumere la forma seguente

$$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} a_1 + 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

4) Studio del limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} a_1 + 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) = 0 + 4(1-0) = 4$$

Osservazione

La successione converge al valore 4, quale che sia il valore del primo termine, purché diverso da zero.