

Sulle progressioni geometriche

Note teoriche

1) La progressione

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ e } a_n \text{ reale qualsiasi}$$

è geometrica se il rapporto tra un termine qualsiasi successivo al primo ed il precedente è costante

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q;$$

il valore del rapporto è detto ragione della progressione. Evidentemente, perché abbia senso la definizione data tutti i termini della progressione ed il valore della ragione devono essere diversi da zero.

2) Sussistono le seguenti proprietà.

a. $a_2 = a_1 \cdot q$, dove q è la ragione della progressione.

b. $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

c. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, da cui anche

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}, \text{ quest'ultima, nel caso in cui } (n-1) \text{ sia pari, quindi con } n \text{ dispari e maggiore o}$$

uguale a 3, sussiste solo se a_n ed a_1 sono concordi.

d. $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ quali che siano r ed s numeri naturali positivi.

e. Somma dei primi n termini della progressione

Proviamo che risulta $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, con $q \neq 1$.

Dim.

Ricordiamo che sussistono le seguenti scomposizioni in fattori

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

$$1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$$

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2 \text{ naturale.}$$

Le uguaglianze scritte sono verificate $\forall x \in \mathbb{R}$. Dall'ultima uguaglianza deduciamo che per $x \neq 1$ si ha anche

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Ciò premesso si ha

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$$

f. **Prodotto dei primi n termini**

Sussistono le seguenti uguaglianze

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^n q^{1+2+3+\dots+(n-1)}$$

e poiché risulta

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

possiamo scrivere anche

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}} \quad (\text{f.1})$$

Osservazione

Nella relazione scritta l'esponente della ragione q è intero positivo perché uno fra i due fattori (n-1) ed n è pari, quindi il numeratore della frazione all'esponente è divisibile per due; questa conclusione permette di affermare che la relazione (f.1) ha senso quale che sia la progressione geometrica, sia che abbia ragione positiva (in questo caso i termini della progressione sono concordi) sia che abbia ragione negativa (in questo caso due qualsiasi termini consecutivi della progressione hanno segno discorde).

Proviamo che sussiste per P_n anche la seguente formula

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \quad (\text{f.2})$$

Riprendendo la (f.1) e tenendo conto della relazione c. abbiamo

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}} = (a_1^2 \cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 \cdot a_1 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Osserviamo che se $n \geq 3$ è dispari allora per l'esistenza della radice quadrata deve risultare $a_1 \cdot a_n > 0$. Ebbene, se la ragione q è positiva allora tutti i termini della progressione hanno lo stesso segno, quindi senz'altro risulta $a_1 \cdot a_n > 0$; se la ragione q è negativa allora due qualsiasi termini consecutivi hanno segno discorde, ma i termini che hanno indice dispari sono tutti positivi o tutti negativi, quindi il prodotto $a_1 \cdot a_n$ è ancora positivo.

Se n è pari, il radicando della radice quadrata risulta comunque positivo, dunque non c'è alcun problema per l'esistenza radice stessa.

La formula (f.2) sussiste dunque sia con n pari, sia con n dispari. C.V.D.

g. **Somma degli infiniti termini di una progressione geometrica con ragione $|q| < 1$**

Chiarimo subito che non ha senso sommare un numero infinito di termini.

L'espressione "somma di infiniti termini di una progressione geometrica" sta ad indicare semplicemente il risultato del seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

quando esiste ed è finito.

Ebbene, se è soddisfatta la condizione $|q| < 1$, allora risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$$

e da ciò segue anche che $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{C.V.D.}$$

Nota

Per una progressione geometrica avente ragione $|q| < 1$, il cui primo termine sia a_1 , si è soliti scrivere

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

h. Inserimento di n termini medi geometrici tra due numeri reali a e b assegnati

Si tratta di inserire tra due numeri assegnati altri n numeri che formino con i precedenti una progressione geometrica avente $n + 2$ termini con un ben preciso valore per la ragione q . Il problema sarà risolto non appena sarà stato determinato il valore della ragione q .

Ponendo $a_1 = a$ e $a_{n+2} = b$, la ragione q della progressione verifica l'uguaglianza

$$a_{n+2} = a_1 \cdot q^{n+1}, \text{ da cui}$$

$$q = \left(\frac{a_{n+2}}{a_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{\frac{a_{n+2}}{a_1}} = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

Ebbene, il radicale ottenuto, se $n+1$ è pari, quindi se n è dispari, richiede che a e b siano concordi. Ne segue che **se i valori numerici a e b assegnati sono discordi allora non è possibile inserire tra essi un numero dispari di termini in modo da ottenere una progressione geometrica**; è invece sempre possibile inserire tra due numeri qualsiasi diversi da zero un numero pari di termini in modo da ottenere una progressione geometrica della quale i due numeri assegnati siano uno il primo termine e l'altro l'ultimo.