Sulle progressioni aritmetiche

Problema geometrico – Considerato un poligono convesso di n lati, siano α_1, α_2, α_3,…, α_n le ampiezze dei suoi angoli interni. Nell'ipotesi che le ampiezze degli angoli interni formino una progressione aritmetica e che l'angolo maggiore abbia ampiezza pari ad n volte l'ampiezza dell'angolo minore, risolvere i seguenti quesiti.

a) Dimostrare che non esiste un poligono convesso con più di quattro lati che abbia le proprietà indicate per i suoi angoli interni.
b) Determinare le ampiezze degli angoli nei due casi n=3 (triangoli), n=4 (quadrilateri).

Elaborazioni

a) Ricordiamo innanzitutto che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è uguale ad (n-2) angoli piatti.

Esprimendo le ampiezze degli angoli nel sistema sessagesimale, la proprietà richiamata è espressa dall'uguaglianza

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n=(n-2)\cdot 180°$, con n intero e $n\geq 3$. (1)

Notiamo che affinché il poligono sia convesso l'ampiezza di ciascun suo angolo interno deve essere maggiore di 0° e minore di 180°, quindi

$0°<\alpha_i<180°$, con i=1,..,n. (2)

Supponendo che le ampiezze α_1, α_2, α_3,…, α_n degli angoli interni del poligono siano ordinate in forma crescente, sussiste per ipotesi l'uguaglianza

$\alpha_n=n\alpha_1$ (3)

Inoltre, detta d la ragione della progressione aritmetica formata dalle n ampiezze, per l'n-esima ampiezza α_n sussiste l'espressione seguente

$\alpha_n=\alpha_1+(n-1)d$ (4)

Uguagliando le due espressioni indicate per α_n si ha

$n\alpha_1=\alpha_1+(n-1)d$, quindi $(n-1)\alpha_1=(n-1)d$, da cui

$\alpha_1=d$, poiché n-1≠0 in quanto $n\geq 3$. (5)

Dunque l'ampiezza dell'angolo minore del poligono coincide con il valore della ragione della progressione aritmetica e conseguentemente si ha anche

$\alpha_n=nd$.

Ricordiamo ora che la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \frac{n(\alpha_1+\alpha_n)}{2}.$$

In virtù della condizione $\alpha_n = n\alpha_1$ la precedente somma assume le seguenti forme

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \frac{n(\alpha_1+\alpha_n)}{2} = \frac{n(n+1)\alpha_1}{2} = \frac{(n+1)\alpha_n}{2};$$

d'altra parte vale l'uguaglianza (1), quindi sussiste l'uguaglianza

$\frac{(n+1)\alpha_n}{2} = (n-2)\cdot 180°$, dalla quale ricaviamo

$\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 360°}{n+1}$, con *n* intero e *n*≥3.

Imponendo ora che α_n rispetti la condizione (2), per la convessità del poligono, si ottiene la doppia disuguaglianza

$0° < \frac{(n-2)\cdot 360°}{n+1} < 180°$, dalla quale si ricava

$0 < \frac{2(n-2)}{n+1} < 1$, che si trasforma nel sistema

$\begin{cases} n-2>0 \\ \frac{2(n-2)}{n+1}<1 \end{cases}$, da cui si ha successivamente $\begin{cases} n>2 \\ 2n-4<n+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n>2 \\ n<5 \end{cases}$

Conclusione

Il numero dei lati per i poligoni convessi i cui angoli hanno le proprietà richieste dal problema può essere *n* =3 oppure *n* =4, quindi devono essere triangoli o quadrilateri.

b) **Casi particolari *n*=3 ed *n*=4**

Caso *n*=3

La somma degli angoli interni di un triangolo vale 180° :

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180°$

Poiché è noto che $\alpha_3 = 3\alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1 + d$ e inoltre per la (5) $\alpha_1 = d$, ricaviamo

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 180° \rightarrow \alpha_1 + (\alpha_1 + d) + 3\alpha_1 = 180° \rightarrow 5\alpha_1 + d = 180° \rightarrow 6\alpha_1 = 180° \rightarrow \alpha_1 = 30°,$$

quindi $\alpha_2 = 60°$ e $\alpha_3 = 90°$.

I **triangoli** che hanno le caratteristiche richieste sono **rettangoli**.

Caso *n* =4

Sappiamo che $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360°$;

ancora $\alpha_4 = 4\alpha_1$, e per la proprietà sulla somma dei primi *n* termini di una progressione aritmetica si ha anche

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{4(\alpha_1 + \alpha_4)}{2} = 2(\alpha_1 + 4\alpha_1) = 10\alpha_1\,;$$

confrontando le due espressioni della somma delle ampiezze dei quattro angoli ricaviamo $10\alpha_1 = 360°$, da cui $\alpha_1 = 36°$. Per la (5) la ragione della progressione è d=36°. Concludiamo che le ampiezze degli altri tre angoli sono: 72°, 108°, 136°.

Nella figura che segue è rappresentato un quadrilatero i cui angoli interni misurano 36°, 72°, 108°, 144°. Il quadrilatero è stato costruito con gli strumenti della geometria analitica. Il lettore può riconoscere agevolmente che si tratta di un trapezio avente per basi i lati AB, CD.