Sulle progressioni aritmetiche

Determinare i cinque numeri che sono in progressione aritmetica la cui somma è 5 e la somma dei loro quadrati è 95.

Elaborazioni

Sappiamo che

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2}$ e che $a_5 = a_1 + 4d$, dunque

$\frac{5(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(a_1 + a_1 + 4d)}{2} = 5$, quindi

$a_1 + 2d = 1$. (*)

Notiamo che $a_1 = a_3 - 2d$ e quindi la (*) diventa

$a_3 - 2d + 2d = 1$, da cui $a_3 = 1$.

Utilizziamo ora l'informazione sulla somma dei quadrati dei cinque termini esprimendola tramite a_3 e la ragione.

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 95$, che diventa

$(a_3 - 2d)^2 + (a_3 - d)^2 + a_3^2 + (a_3 + d)^2 + (a_3 + 2d)^2 = 95$ (**)

Essendo a_3=1 la (**) diventa

$(1-2d)^2 + (1-d)^2 + 1 + (1+d)^2 + (1+2d)^2 = 95$, che elaborata diventa

$10d^2 = 90$, da cui $d = \pm 3$.

Assumendo d=3 i cinque numeri cercati a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 formano una progressione strettamente crescente, mentre con d=-3 si ottengono gli stessi numeri ma disposti in forma decrescente.

I numeri sono

$a_1 = a_3 - 2d = 1 - 6 = -5$; $a_2 = -2$; $a_3 = 1$; $a_4 = 4$; $a_5 = 7$.