Tema: triangoli e rettangoli iscritti in un triangolo

Variazione dell'area

Un rettangolo inscritto in un triangolo qualsiasi

Si consideri un triangolo ABC qualsiasi e siano a, b, c, le misure dei lati opposti ai vertici omonimi. Si consideri la retta r parallela al lato BC che taglia i lati AB, AC rispettivamente in D ed E e siano D', E' le loro proiezioni ortogonali sul lato BC.

1. Indicata con x la distanza della retta r dalla base BC, determinare in funzione di x l'area S(x) del rettangolo DD'E'E precisando il dominio di variabilità di x nell'ipotesi che la retta r intersechi i lati AB, AC del triangolo ABC.
2. Analizzare la funzione area S(x) nel dominio di variabilità di x relativamente alla continuità giustificando perché certamente la funzione S(x) ammette massimo e minimo assoluti. Riconoscere che il valore massimo dell'area del rettangolo coincide con la metà dell'area del triangolo ABC.

Elaborazioni

Premesse. Facciamo riferimento alla Figura 1 nella quale sono riportati gli elementi geometrici essenziali per la risoluzione del problema in esame: il generico triangolo ABC, la retta r//BC che interseca i lati AB, AC rispettivamente in D ed E ed il rettangolo DD'E'E. Poiché il segmento DD' (come pure il segmento EE') perpendicolare a BC rappresenta la distanza della retta r dal lato BC poniamo $\overline{DD'} = x$. Le misure dei lati a, b, c del triangolo ABC sono indicate aderentemente ai rispettivi lati.

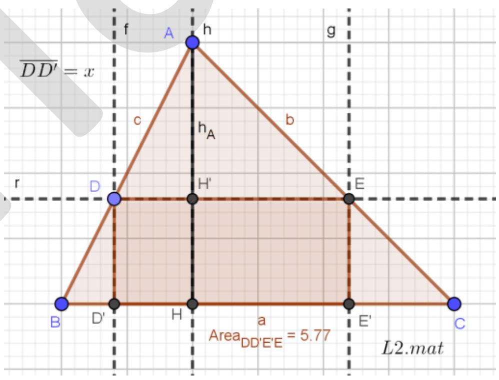

Figura 1

Risolveremo il problema in esame utilizzando la similitudine dei triangoli ABC, ADE, sfruttando adeguatamente il teorema delle altezze relative a due lati omologhi; per questo motivo nella figura è stata indicata l'altezza AH del triangolo relativa alla base AB e nel contesto della risoluzione si è posto $\overline{AH} = h_A$.

1. **Discussione del problema**
   a. **Similitudine dei triangoli ABC, ADE**. Ricordiamo che una conseguenza del **teorema di Talete** è rappresentata dal seguente *Teorema: Dato un triangolo ABC, una retta parallela ad uno dei tre lati del triangolo che intersechi gli altri due lati in due punti distinti determina un secondo triangolo simile al triangolo ABC.*
   Nel caso specifico, poiché la retta r è parallela al lato BC, intersecando i due lati AB, AC rispettivamente nei punti di D ed E, individua il triangolo ADE che è simile al triangolo ABC. Ciò premesso, osserviamo che nel testo del problema è stata indicata con x **la misura della distanza della retta r dalla base BC del triangolo ABC** e poiché r deve intersecare gli altri due lati del triangolo la sua distanza dal lato BC può variare dal **valore minimo zero**, che si verifica quando la retta r passa dal vertice B, al **valore massimo** corrispondente alla misura dell'altezza h_A del triangolo ABC relativa al vertice A assunto quando la retta r passa dal

vertice A; pertanto, sussiste la doppia limitazione $0 \le x \le h_A$. Evidentemente, quando la retta **r passa per il vertice B o per il vertice A** il rettangolo DD'E'E degenera in un doppio segmento ed ha area nulla. Precisamente,
- nel caso sia ***x*=0** (la retta r passa per B e contiene il lato BC) i latti DE, D'E' del rettangolo coincidono con la base BC del triangolo: **il rettangolo degenera nel doppio segmento BC** ed ha area nulla;
- quando la retta r passa il vertice A allora i lati DD', EE' del rettangolo coincidono con il segmento AH, altezza del triangolo ABC relativa al lato BC: il rettangolo degenera nel doppio segmento AH ed anche in questo caso la sua area è nulla.

Nelle posizioni intermedie della retta r (il punto D è interno al lato AB) l'area del rettangolo DD'E'E è diversa da zero.

b. **Espressione dell'area del rettangolo DD'E'E**. La misura di DD' è *x*. Per ricavare la misura di DE utilizziamo la similitudine tra i triangoli ABC, ADE ai quali applichiamo il teorema delle altezze relativamente alle basi BC, DE. AH è l'altezza di ABC relativa alla base BC, AH' è l'altezza di ADE relativa alla base DE. Sussiste la proporzione

AH: AH'= BC:DE→ $\overline{AH}:\overline{AH'}=\overline{BC}:\overline{DE}$.

Con $\overline{AH}=h_A$, $\overline{DD'}=x$, $\overline{AH'}=\overline{AH}-\overline{DD'}=h_A-x$, $\overline{BC}=a$, si ha: $h_A:(h_A-x)=a:\overline{DE}\rightarrow$

$\overline{DE}=\frac{a}{h_A}\cdot(h_A-x)$.

L'area del rettangolo in oggetto è $S(x)=\overline{DE}\cdot\overline{DD'}=\frac{a}{h_A}\cdot x(h_A-x)$, con $0\le x\le h_A$.

2. **Analisi della funzione area del rettangolo DD'E'E**

La funzione area $S(x)=\frac{a}{h_A}\cdot x(h_A-x)$, con $0\le x\le h_A$, è un polinomio di secondo grado ed è definita nell'intervallo chiuso limitato $[0;h_A]$ e poiché è continua **per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti**. Il valore minimo assoluto vale zero ed è assunto agli estremi dell'intervallo, **per calcolare il valore massimo assoluto possiamo fornire due diversi percorsi di ricerca**: il primo sfrutta una proprietà della funzione quadratica $y(x)=ax^2+bx+c$, con *a*<0, alla quale corrisponde nell'intervallo $[0;h_A]$ un arco di parabola, il secondo metodo sfrutta uno strumento dell'analisi matematica (ricerca del massimo di una funzione derivabile con lo studio del segno e degli zeri della derivata prima).

a. **Primo percorso**. Consideriamo l'equazione cartesiana $y=\frac{a}{h_A}\cdot x(h_A-x)$, anzi, eliminando il fattore costante $\frac{a}{h_A}$, consideriamo l'equazione $y=x(h_A-x)$, scritta nella forma $y=-x^2+h_A\cdot x$, con la doppia limitazione $0\le x\le h_A$; ad essa corrisponde nel piano cartesiano *x*O*y* l'arco di **parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, concavità rivolta verso il basso**, che ha come vertice il punto $V\left(\frac{h_A}{2};\frac{h_A}{4}\right)$.

Osservato che l'ascissa del vertice verifica la doppia disuguaglianza $0<\frac{h_A}{2}<h_A$ si deduce che **l'ordinata del vertice rappresenta anche il massimo valore che può assumere l'ordinata del generico punto della parabola** e rappresenta quindi anche il valore massimo che può assumere l'espressione algebrica $x(h_A-x)$. Da ciò si deduce che il valore massimo

che può assumere l'espressione algebrica $\frac{a}{h_A}\cdot x(h_A - x)$ è quello questa assume ponendo $x=\frac{h_A}{2}$. Eseguendo le elaborazioni si ottiene

$$y_{Max}=\frac{a}{\cancel{h_A}}\cdot\frac{\cancel{h_A}}{2}\left(h_A-\frac{h_A}{2}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{h_A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot h_A}{2}$$

A questo punto è opportuno **notare** che **l'area del triangolo ABC**, calcolandola utilizzando la base BC, che misura *a*, e l'altezza relativa AH, la cui misura abbiamo indicato con h_A, è $Area(ABC)=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AH}}{2}=\frac{a\cdot h_A}{2}$ e quindi il rettangolo di area massima inscritto nel triangolo ABC ha area uguale alla metà dell'area del triangolo ABC.

b. **Secondo percorso**. Studiamo la monotonia della funzione area $S(x)=\frac{a}{h_A}\cdot x(h_A-x)$, con $0\le x\le h_A$. Troviamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri nel dominio di definizione.

$S'(x)=\frac{a}{h_A}\cdot(h_A-2x)\ge 0 \rightarrow x\le\frac{h_A}{2}$; quindi:

per $0\le x<\frac{h_A}{2}$ la derivata prima è positiva, dunque la funzione area S(*x*) è strettamente crescente;

per $\frac{h_A}{2}<x\le h_A$ la funzione derivata prima è negativa, quindi la funzione area è strettamente decrescente.

Deduciamo che $x=\frac{h_A}{2}$ è punto di massimo (assoluto) per la funzione area ed il valore assunto è $S\left(\frac{h_A}{2}\right)=\frac{a}{h_A}\cdot\left(\frac{h_A}{2}\cdot h_A-\left(\frac{h_A}{2}\right)^2\right)=$

$$\frac{a}{\cancel{h_A}}\cdot\frac{\cancel{h_A}}{2}\left(h_A-\frac{h_A}{2}\right)=\frac{a\cdot h_A}{2}.$$

Abbiamo, ovviamente, ottenuto lo stesso risultato.

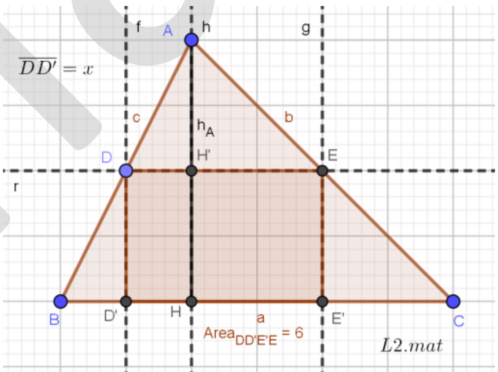

Figura 2- Il rettangolo DD'E'E inscritto nel triangolo rettangolo ABC visualizzato in figura è quello avente area massima. Si può notare che il valore della sua area è indicato dall'etichetta Area$_{DD'E'E}$ = 6. Il lettore attento riconoscerà che il triangolo ABC in cui il rettangolo è inscritto ha la base BC=6u, l'altezza relativa AH=4u, quindi Area(ABC)=6·4:2=12u².

3. Considerazioni generali conclusive

a. Il rettangolo inscritto in un triangolo ABC qualsiasi, acutangolo o rettangolo, indipendentemente su quale lato del triangolo si colloca la base del rettangolo, avrà area massima allorquando l'altro lato del rettangolo avrà misura uguale alla metà dell'altezza del triangolo relativa al lato sul quale giace il primo lato del rettangolo. Se il triangolo ABC di partenza è ottusangolo allora il rettangolo inscritto deve avere la base sul lato maggiore e la retta r parallela al lato maggiore intersecherà gli altri due lati [1]. Il rettangolo inscritto

[1] Infatti, si può riconoscere immediatamente che non si può inscrivere in un triangolo ottusangolo un rettangolo avente un lato su uno dei due lati diversi dal lato maggiore e gli altri due vertici sugli altri lati.

di area maggiore sarà comunque quello avente come altezza la metà dell'altezza del triangolo ottusangolo relativa al lato maggiore.

b. In un lavoro pubblicato su https://www.matematicaescuola.it [(2)] relativo al **rettangolo di area massima inscritto in un triangolo rettangolo ABC**, avente la base su uno dei cateti del triangolo di partenza, è stato dimostrato che il rettangolo di area massima aveva area pari alla metà dell'area del triangolo. Quel risultato non era dovuto al particolare triangolo (triangolo rettangolo) oggetto del problema, come dimostrato nella risoluzione del presente problema in cui è stato considerato un triangolo qualsiasi.

[(2)] Consultare il lavoro dal titolo "Geometria euclidea del piano. Rettangolo inscritto in triangolo rettangolo. Variazione dell'area e ricerca del rettangolo inscritto di area massima." Presente su https://www.matematicaescuola.it Link al lavoro