# Tema: triangoli e rettangoli iscritti in un triangolo

# Variazione dell'area

## Un rettangolo inscritto in un triangolo rettangolo

Si consideri il triangolo ABC con l'angolo retto nel vertice A e siano $a$, $b$, $c$, le misure dei lati opposti ai vertici omonimi. Si consideri la retta $r$ parallela al lato AB che taglia i lati AC, BC rispettivamente in D ed E e sia F la proiezione ortogonale di E sul cateto AB.

1. Indicata con $x$ la misura di AD, distanza della retta $r$ dal cateto AB, precisare il dominio di variabilità di $x$ nell'ipotesi che la retta $r$ intersechi il lato AC del triangolo ABC ed esprimere in funzione di $x$ l'area S($x$) del rettangolo ADEF.
2. Stabilire per quale valore di $x$ la funzione area S($x$) del rettangolo ADEF assume il valore massimo.
3. Confrontare l'area del rettangolo inscritto avente area massima con quella del triangolo ABC.
4. Realizzare la figura geometrica contenente il rettangolo inscritto di area massima.

### Elaborazioni

1. Facciamo riferimento alla Figura 1 nella quale sono indicati il triangolo rettangolo ABC, il generico punto D sul cateto AC, la retta r//AB passante per D che taglia l'ipotenusa BC nel punto E. La proiezione ortogonale di E su AB è il punto F. Il rettangolo ADEF inscritto nel triangolo rettangolo ABC è quello di cui si deve determinare l'area S($x$), con $\overline{AD}=x$.
   Come indicato nel testo del problema si ha: $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$.

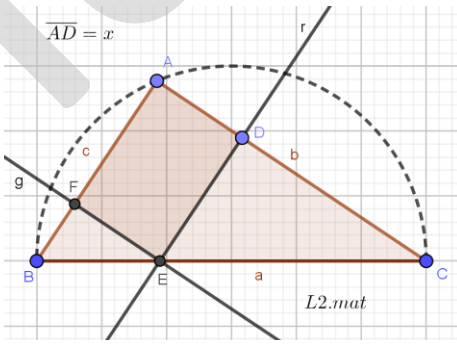

Figura 1

   a. La variabilità di $x$ è 0≤ $x$ ≤b perché il punto D può essere scelto coincidente anche con uno dei due vertici del lato AC.
   b. Con $\overline{AD}=x$ deduciamo che la misura di DC è b- $x$. Osserviamo che i due triangoli rettangoli ABC, DEC sono simili perché hanno gli angoli ordinatamente congruenti per cui possiamo ricavare la misura del lato DE dalla proporzione DE:AB=DC:AC, da cui
   $$\overline{DE}:c=(b-x):b \rightarrow \overline{DE}=\frac{c(b-x)}{b}.$$
   c. L'area del rettangolo ADEF vale: $S(x)=\overline{AD}\cdot\overline{DE}=\frac{cx(b-x)}{b}=\frac{c}{b}(bx-x^2)$.

2. Consideriamo ora la funzione area $y=S(x)$ del rettangolo ADEC, $y=-\frac{c}{b}x^2+cx$, con le limitazioni 0≤ $x$ ≤b. Il diagramma della funzione in oggetto è l'arco di parabola avente equazione $y=-\frac{c}{b}x^2+cx$, che in un riferimento cartesiano $x$O$y$ ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, la concavità rivolta verso il basso ed il suo vertice V, che ha coordinate

$$x_V = \frac{c}{2\cdot\frac{c}{b}} = \frac{b}{2},\ y_V = S(x_V) = S\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{c}{b}\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{bc}{4},$$

è il punto della parabola in cui la funzione S(*x*) assume il valore massimo. Il valore massimo dell'area del rettangolo ADEF inscritto nel triangolo rettangolo ABC è dunque bc/4.

3. Osserviamo ora che l'area del triangolo ABC, ottenuta come il semiprodotto delle misure dei due cateti, vale:

$$Area(ABC) = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{2} = \frac{bc}{2},$$

quindi si riconosce che **l'area del rettangolo inscritto avente area massima è pari alla metà dell'area dell'intero triangolo ABC**.

   a. **Osservazione particolare**. Dall'ascissa del vertice della parabola si evince che il punto D per il quale si ottiene il rettangolo di area massima coincide con il punto medio del cateto AC e per la similitudine dichiarata prima dei triangoli ABC, DEC, anche il vertice E del rettangolo coincide con il punto medio dell'ipotenusa e, in definitiva, anche il punto F del rettangolo ADEF coinciderà con il punto medio del cateto AB.

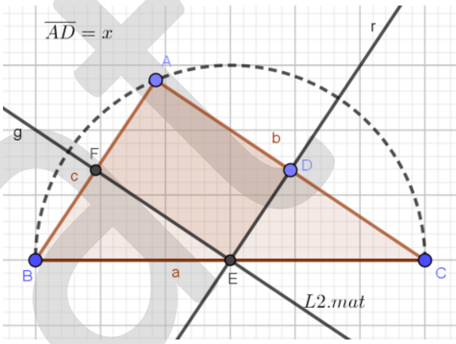


**Figura 2-Il rettangolo ADFF inscritto nel triangolo rettangolo ABC, al variare della posizione del punto D sul cateto AC, è quello avente l'area massima e questo valore è pari alla metà dell'area del triangolo ABC.**

4. La figura nella quale il rettangolo ADEF inscritto nel triangolo ha area massima è riportata in Figura 2.