

Rettangolo inscritto in un triangolo avente area massima

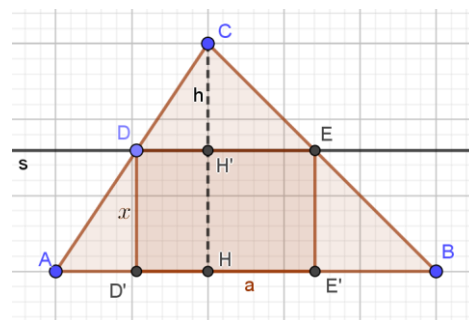
Problema

Sia ABC un triangolo qualsiasi. Condurre una retta s parallela al lato AB che intersechi gli altri due lati del triangolo nei punti D, E. Dette D', E' le proiezioni ortogonali dei punti D, E su AB, determinare per quale posizione della retta s il rettangolo DD'E'E ha area massima.

Elaborazioni

Premessa - Osserviamo che il triangolo ABC è un triangolo qualsiasi e il lato AB indicato nel testo è uno qualsiasi dei tre lati. Si tratta di ottimizzare l'area del rettangolo DD'E'E che si costruisce in modo che sia massima. Si scoprirà che la soluzione trovata è legata all'area del triangolo di partenza e che il risultato non dipende dalla scelta del lato AB considerato.

Il triangolo ABC ha evidentemente un'area ben precisa; se indichiamo con a la misura del lato AB e con h la misura dell'altezza relativa, l'area del triangolo misura $ah/2$. Per la risoluzione del problema facciamo riferimento alla figura riportata a margine, nella quale CH è l'altezza del triangolo relativa alla base AB.



Indichiamo con x la distanza della retta s dalla base AB del triangolo. Poiché la retta deve intersecare gli altri due lati del triangolo per la misura x devono valere le limitazioni $0 \leq x \leq h$.

Osserviamo che il triangolo DEC è simile al triangolo ABC e l'altezza CH' relativa alla base DE misura $h-x$; inoltre, per il teorema dell'altezza in triangoli simili sussiste la proporzione $CH':DE=CH:AB$, dalla quale, passando alle misure dei segmenti ricaviamo

$$\frac{DE}{CH} = \frac{AB \cdot CH'}{CH} = \frac{a \cdot (h-x)}{h}$$

L'area del rettangolo DD'E'E è

$$S(x) = \overline{DE} \cdot \overline{D'D} = \frac{a \cdot (h-x)}{h} \cdot x = \frac{a}{h} \cdot (hx - x^2)$$

Dobbiamo determinare il massimo della funzione $S(x)$ e certamente detto massimo esiste perché la funzione è un polinomio da considerare nell'intervallo chiuso $[0;h]$; si tratta di una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato e per il teorema di Weierstrass ammette sia massimo, sia minimo assoluti. Determiniamo la derivata prima $S'(x)$ e studiamone segno e zeri.

$$S'(x) = \frac{a}{h} \cdot (h - 2x) \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{h}{2}$$

Pertanto la derivata prima è positiva nell'intervallo $[0;h/2]$, quindi in esso la funzione area è strettamente crescente, e negativa nell'intervallo $]h/2;h]$ dove la funzione area è strettamente decrescente, infine la

funzione derivata prima si annulla per $x=h/2$. Si conclude che nel punto $x=h/2$ la funzione assume il suo massimo assoluto il cui valore è

$$S_{\max} = \frac{a}{h} \cdot \left(h \cdot \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{a}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{ah}{4}$$

Osservazione - Notiamo che il rettangolo inscritto nel triangolo ABC avente area massima ha area pari alla metà dell'area del triangolo in cui è inscritto e si ottiene tracciando la retta s parallela alla base AB passante per il punto medio dell'altezza relativa. Evidentemente questa conclusione è indipendente dalla scelta del lato AB. Sussiste la seguente **proprietà**: il rettangolo di area massima inscritto in un triangolo qualsiasi ABC ha area pari alla metà dell'area del triangolo stesso.