La forma ideale rettangolare per un maneggio

(Come minimizzare il costo per una recinzione)

In una fattoria il titolale desidera recintare una regione di forma rettangolare avente area 800m^2 da adibire a maneggio. Il recinto deve essere realizzato impiantando lungo un lato una siepe, lungo gli altri lati una staccionata in legno. I **costi al metro lineare** per la realizzazione della recinzione sono:

a) per la siepe occorrono €5 per lo scavo, €12 per l'acquisto e la messa a dimora delle piante;
b) per la staccionata €6 per lo scavo, €14 per l'acquisto, €10 per la posa in opera.

Determinare quale forma deve avere il rettangolo per il maneggio avendo come obiettivo quello che la spesa per la recinzione sia minima.

Elaborazioni

Sia ABCD il rettangolo dell'area da destinare a maneggio, con AB lato da recintare con la siepe. Indichiamo con x la misura in metri di AB. Indicando con y la misura in metri della seconda dimensione del rettangolo, poiché l'area deve essere 800m^2 dovrà risultare $xy = 800m^2$, quindi $y = \frac{800}{x}(m)$.

Costi per la costruzione della recinzione

a) Per realizzare x metri di siepe occorre la somma $C_1(x) = (5+12)\left(\frac{€}{m}\right)\cdot x(m) = 17x(€)$.

b) La lunghezza dei tre lati da recintare con la staccionata in legno è pari a (2*y*+*x*) metri, con $y = \frac{800}{x}$. Poiché il costo per la realizzazione di un metro lineare di staccionata è €(6+14+10)=€30, il costo sarà $C_2(x) = 30\left(\frac{€}{m}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{800}{x}+x\right)(m) = 30\cdot\left(\frac{1600}{x}+x\right)(€)$

Il costo totale per la recinzione sarà dunque

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \left(17x + 30\cdot\left(\frac{1600}{x}+x\right)\right)(€) = \left(\frac{48\cdot 10^3}{x} + 47x\right)(€)$$

La funzione di cui determinare il minimo (valore ottimo) è $f(x) = \frac{48\cdot 10^3}{x} + 47x$, con l'ovvia condizione *x*>0.

Determiniamo la derivata prima della funzione e studiamone segno e zeri.

$$f'(x) = -\frac{48\cdot 10^3}{x^2} + 47 = \frac{47x^2 - 48\cdot 10^3}{x^2}$$

Osserviamo che la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$ è soddisfatta se e solo se risulta $47x^2 - 48 \cdot 10^3 \geq 0$, quindi per $\left(x \leq -40\sqrt{\frac{30}{47}} \right) \vee \left(x \geq 40\sqrt{\frac{30}{47}} \right)$; per la condizione x>0 imposta per il dominio della funzione costo dobbiamo considerare solo la disuguaglianza $x \geq 40\sqrt{\frac{30}{47}}$.

Deduciamo che per $0 < x < 40\sqrt{\frac{30}{47}}$ la derivata prima è negativa, quindi al funzione $f(x)$ è strettamente decrescente, mentre per $x > 40\sqrt{\frac{30}{47}}$ la derivata prima è positiva, quindi la funzione $f(x)$ è strettamente crescente, conseguentemente nel punto $x = 40\sqrt{\frac{30}{47}} \simeq 31,95$ la funzione ammette il minimo assoluto.

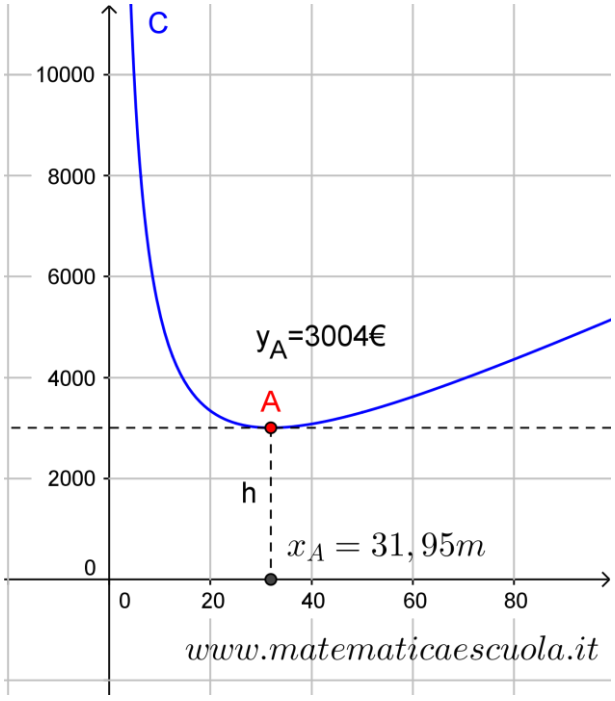
Conclusione

Per avere la minima spesa per la recinzione le dimensioni del rettangolo devono essere $x = 31,95m$, $y = \frac{800}{x} m \simeq 25,04m$. Il costo complessivo per la recinzione è

$$C_{tot} = \left(\frac{48 \cdot 10^3}{31,95} + 47 \cdot 31,95 \right) € \simeq 3004,00€$$

La somma necessaria è così suddivisa:

$C_1 \simeq 543,15€$, per la realizzazione della siepe;

$C_2 \simeq 2460,85€$, per la realizzazione della staccionata.

Riportiamo a margine il grafico del costo di realizzazione della recinzione in funzione della lunghezza x in metri del tratto recintato con siepe.