

Studio di un limite

Con i limiti notevoli

Provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{|x|}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}} = e$$

Soluzione

Considerazioni preliminari

Per lo studio del limite in esame occorre stabilire la proprietà del punto $x=0$ relativamente al tipo di accumulazione per il dominio di definizione della funzione.

Osserviamo che la funzione di riferimento, per la sua struttura, è definita solo per i valori reali x che soddisfano la disuguaglianza $x^2 - x > 0$. L'insieme delle soluzioni di detta disequazione è

$A =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, e dunque il punto $x=0$ è di accumulazione solo a sinistra.

Studio del limite

Per quanto premesso, il limite da studiare diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}}$$

e si riconosce immediatamente che si presenta della forma indeterminata $1^{+\infty}$. Infatti,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x}\right) = 1 + \operatorname{arctg} 0 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Per lo studio del limite trasformiamo la funzione passando alla forma esponenziale:

$$\left(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \log(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x})}$$

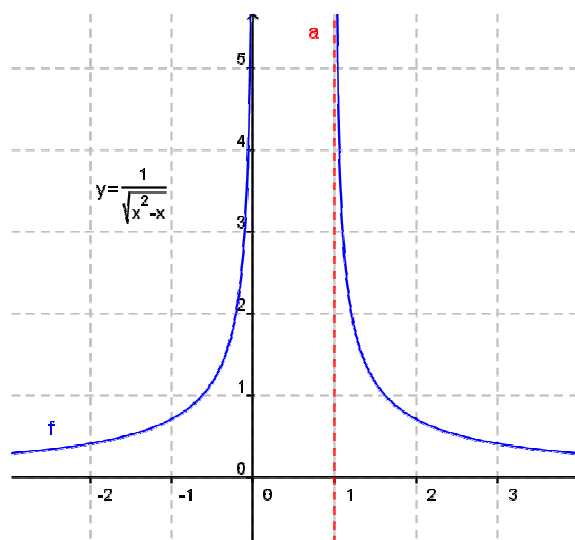
Nel corso delle elaborazioni si applicheranno i due limiti notevoli

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Elaborazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} \log(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{\log(1 + \operatorname{arctg} \sqrt{-x})}{\operatorname{arctg} \sqrt{-x}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x^2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x^2-x}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x^2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\sqrt{\frac{-x}{x^2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\sqrt{\frac{1}{1-x}}} = e$$



Operatività con GeoGebra

In figura è riportata la funzione $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$

- 1) Per inserire l'espressione della funzione, digitare nella barra della formula l'espressione $y = 1 / \sqrt{x^2 - x}$.
- 2) Per ottenere il testo della funzione nell'area del grafico è necessario attivare la casella di controllo per il linguaggio **Latex** e digitare il seguente testo:
 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$