

Studio di limiti delle forme $0^0, \infty^0, 1^\infty, 0^\infty$

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}} = 0^0$ R. e^{-1}
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\log x}} = 0^0$ R. $e^{\frac{1}{2}}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x)^{\frac{1}{\log x}} = (+\infty)^0$ R. e
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1)^{-\frac{1}{\log(3x)}} = (+\infty)^0$ R. e^{-1}
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{\frac{2x^2+1}{x}} = 1^{+\infty}$ R. e^6
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{\frac{x^2-4}{x}} = 1^{-\infty}$ R. e^{-1}
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\log\left(\frac{1}{x}\right)} = 0^{+\infty}$ R. 0^+
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\log x}} = 0^{+\infty}$ R. 0^+
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{6x+2} \right)^x$ (Attenzione: non si tratta di una forma indeterminata) R. 0^+
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+1}{3x+2} \right)^x$ (Attenzione: non si tratta di una forma indeterminata) R. $+\infty$
- 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-4x}{3x+2} \right)^x$ (Attenzione: il limite non ha senso. Perché?)

Soluzione

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}} = 0^0$$

Per studiare il limite passiamo alla forma esponenziale dell'espressione e applichiamo nell'ordine le proprietà della potenza, del quoziente e del prodotto della funzione logaritmo. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log\left(\left(\frac{1}{4x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log(2x)} \cdot \log\left(\frac{1}{4x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\log(4x)}{\log(2x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\log 2 - \log(2x)}{\log(2x)}}$$

A questo punto ci interessiamo del limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log 2 - \log(2x)}{\log(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\log 2}{\log(2x)} - \frac{\log(2x)}{\log(2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\log 2}{\log(2x)} - 1 \right) = \frac{-\log 2}{+\infty} - 1 = -1.$$

In virtù del teorema sul limite della funzione composta si conclude che il limite in esame vale e^{-1} .

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\log x}} = 0^0$$

Si passa alla forma esponenziale della funzione argomento del limite e si applica la proprietà della potenza della funzione logaritmo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\log x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log x} \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)};$$

applicando ancora successivamente la proprietà del quoziente e quella della radice si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log 1 - \log \sqrt{x}}{\log x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{0 - \frac{1}{2} \log x}{\log x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\log x}{\log x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x)^{\frac{1}{\log x}} = (+\infty)^0$$

Si passa alla forma esponenziale della funzione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log \left((5x)^{\frac{1}{\log x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log x} \cdot \log(5x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log 5 + \log x}{\log x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log 5}{\log x} + \frac{\log x}{\log x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log 5}{+\infty} + 1} = e^{0+1} = e$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1)^{\frac{1}{\log(3x)}} = (+\infty)^0 \quad \text{Si passa alla forma esponenziale}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log \left((3x+1)^{\frac{1}{\log(3x)}} \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log(3x)} \cdot \log(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log(3x)} \cdot \log \left(3x \left(1 + \frac{1}{3x} \right) \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log(3x)} \left(\log(3x) + \log \left(1 + \frac{1}{3x} \right) \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log(3x)}{\log(3x)} + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{3x} \right)}{\log(3x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1 - \frac{0}{+\infty}} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{\frac{2x^2+1}{x}} = 1^{+\infty}$$

Si può studiare il limite ricorrendo al limite notevole $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{\alpha}{\varphi(x)} \right)^{\varphi(x)} = e^\alpha$, essendo

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$. Seguono le elaborazioni.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{\frac{2x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)^{2x + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)^{2x+2-2+\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x+1} \right)^{x+1} \right)^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)^{-2+\frac{1}{x}} = (e^3)^2 \cdot (1+0)^{-2+0} = e^6$$

Riportiamo lo studio del limite effettuato passando alla forma esponenziale della funzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log \left(\left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{\frac{2x^2+1}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x^2+1}{x} \cdot \log \left(\frac{x+4}{x+1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(2x + \frac{1}{x} \right) \cdot \log \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)},$$

procediamo con lo studio del limite dell'esponente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{1}{x} \right) \cdot \log \left(1 + \frac{3}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \log \left(1 + \frac{3}{x+1} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{3}{x+1} \right)}{\frac{3}{x+1}} \cdot \frac{3 \cdot 2x}{x+1} + \frac{\log 1}{+\infty} = 1 \cdot 6 + 0 = 6$$

Concludiamo che il limite in esame vale e^6 .

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{\frac{x^2-4}{x}} = 1^{-\infty}$

Studiamo il limite sfruttando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{\alpha}{\varphi(x)} \right)^{\varphi(x)} = e^\alpha$, essendo

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = -\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{\frac{x^2-4}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{2x+3} \right)^{x - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x + \frac{3}{2}} \right)^{x - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x + \frac{3}{2}} \right)^{x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{4}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{-1}{x + \frac{3}{2}} \right)^{x + \frac{3}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x + \frac{3}{2}} \right)^{-\frac{3}{2} - \frac{4}{x}} = e^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{-\infty} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-1} \cdot (1+0)^{-\frac{3}{2}} = e^{-1}$$

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\log \left(\frac{1}{x} \right)}$ Passando alla forma esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log\left(x\right)^{\log\left(\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(\log 1 - \log x) \cdot \log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\log x \cdot \log x} = e^{(-\infty)(-\infty)} = e^{-\infty} = 0^+$$

8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x-1})^{\frac{1}{\log x}}$ Passando alla forma esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\log\left((\sqrt{x-1})^{\frac{1}{\log x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{\log x} \cdot \log \sqrt{x-1}} = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty \cdot (+\infty)} = e^{-\infty} = 0^+$$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{6x+2}\right)^x$ **Il limite non si presenta in una forma indeterminata.** Infatti,

possiamo elaborare la frazione-base della potenza ottenendo

$$\frac{3x+1}{6x+2} = \frac{3x+1}{2(3x+1)}, \text{ che con } x \neq -\frac{1}{3} \text{ diventa equivalente a } \frac{1}{2}.$$

Pertanto, poiché per $x \rightarrow +\infty$ possiamo ritenere la frazione in oggetto effettivamente equivalente a $1/2$ e per il limite in esame si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{2(3x+1)}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0^+$$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+1}{3x+2}\right)^x$ **Il limite non si presenta in una forma indeterminata,** infatti la base

della potenza tende a $\frac{4}{3}$ ed il limite vale $\left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$. A beneficio del lettore riportiamo comunque le elaborazioni necessarie.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+1}{3x+2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(4+x^{-1})}{x(3+2x^{-1})}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(4+x^{-1})}{(3+2x^{-1})}\right)^x = \left(\frac{4+0}{3+0}\right)^{+\infty} = +\infty$$

11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-4x}{3x+2}\right)^x$ **Il limite in esame non ha senso** perché il punto $-\infty$ non è di

accumulazione per il dominio di definizione della funzione. La funzione è definita per i valori della variabile x per i quali è soddisfatta la condizione

$$\frac{1-4x}{3x+2} > 0 \text{ e dunque per i valori } -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{4}.$$