

Sulla verifica della definizione di limite

Applicando la definizione di limite, verificare che sussiste il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{1-x} = e$$

Indice di difficoltà 3 (indice di difficoltà da 1 a 5)

Elaborazioni

La funzione $f(x) = e^{1-x}$ è trascendente esponenziale ed è definita su tutto l'asse reale: $A = \mathbb{R}$. Per la verifica del limite occorre provare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon(0): x \in (I_\varepsilon(0) - \{0\}) \cap A \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Studiamo la disequazione

$$|e^{1-x} - e| < \varepsilon \rightarrow e - \varepsilon < e^{1-x} < e + \varepsilon$$

che trasformiamo nel seguente sistema

$$\begin{cases} e^{1-x} > e - \varepsilon \\ e^{1-x} < e + \varepsilon \end{cases}$$

Osserviamo che per $0 < \varepsilon < e$, la prima disequazione è soddisfatta dai valori $x < 1 - \log(e - \varepsilon)$. La seconda disequazione, per ogni valore di ε , è soddisfatta per i valori reali $x > 1 - \log(e + \varepsilon)$. Poiché sussiste la catena di disuguaglianze

$$1 - \log(e + \varepsilon) < 1 - \log e = 0 < 1 - \log(e - \varepsilon),$$

scopriamo che il sistema di disequazioni è verificato nell'intervallo

$$I_\varepsilon =]1 - \log(e + \varepsilon); 1 - \log(e - \varepsilon)[, \text{ che è un intorno completo del punto } x=0. \text{ Pertanto, con}$$

$I_\varepsilon(0) = I_\varepsilon$ è soddisfatta la definizione di limite.

Per valori $\varepsilon \geq e$ la prima disequazione del sistema è verificata su tutto $\mathbb{R}$ e poiché per la seconda disequazione rimane valido quanto riportato sopra si conclude che il sistema è soddisfatto nell'intervallo $I_\varepsilon =]1 - \log(e + \varepsilon); +\infty[$, che è ovviamente un intorno del punto $x=0$. Anche in questo caso è perciò verificata la definizione di limite.

