Problema di geometria sui limiti

Nel triangolo ABC, con $\overline{AB}=c$, è noto che $B\hat{A}C=3A\hat{B}C$. Condurre per il vertice A una semiretta s che intersechi il lato BC in P in modo che gli angoli $B\hat{A}P$, $P\hat{B}A$ siano congruenti.

Q1- Calcolare il limite del rapporto $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$ quando l'angolo $P\hat{B}A$ tende a zero e quando tende a $\frac{\pi}{4}$.

Q2- Indicata con H la proiezione di B sulla semiretta s, calcolare i limiti del rapporto $\frac{\overline{BH}}{\overline{PB}}$ quando l'angolo $P\hat{B}A$ tende a zero e quando tende a $\frac{\pi}{4}$.

Soluzione

Q1- Facciamo riferimento al triangolo riportato in **Figura 1**.

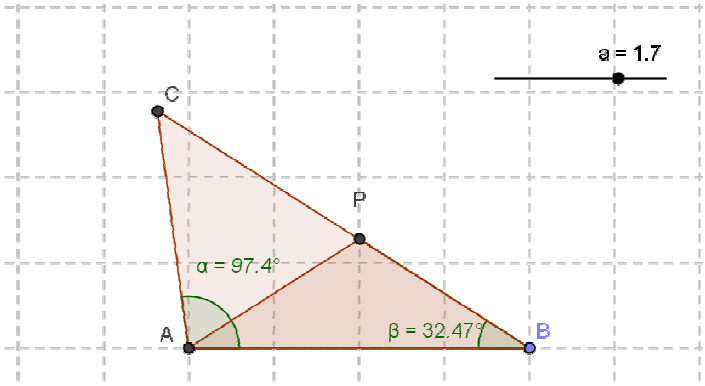

Figura 1

Occorre determinare le misure dei segmenti AP, AC.
Sappiamo che:
$\overline{AB}=c$; $A\hat{B}C=\beta$; $B\hat{A}C=\alpha=3\beta$.
Osserviamo che il triangolo ABP è isoscele su AB, quindi $B\hat{A}P=\beta$ e $A\hat{P}B=\pi-2\beta$.
Applicando il teorema dei seni a detto triangolo determiniamo la misura di AP; analogamente, applicando lo stesso teorema al triangolo ABC possiamo determinare la misura del lato AC. Si ha:

$$\frac{\overline{AP}}{sen\beta}=\frac{\overline{AB}}{sen(\pi-2\beta)}\rightarrow\overline{AP}=\frac{\overline{AB}sen\beta}{sen(\pi-2\beta)}=\frac{c\cdot sen\beta}{sen(2\beta)}=\frac{c\cdot sen\beta}{2sen\beta\cos\beta}=\frac{c}{2\cos\beta},\ \text{con } \beta\neq 0.$$

Per il triangolo ABC risulta $A\hat{C}B=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-4\beta$, per cui, si ha:

$$\frac{\overline{AC}}{sen\beta}=\frac{\overline{AB}}{sen(\pi-4\beta)}\rightarrow\overline{AC}=\frac{\overline{AB}sen\beta}{sen(\pi-4\beta)}=\frac{c\cdot sen\beta}{sen(4\beta)}$$

Valore del rapporto: $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{c}{2\cos\beta}:\frac{c\cdot sen\beta}{sen(4\beta)}=\frac{sen(4\beta)}{2\cos\beta sen\beta}$$

Studio dei limiti

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\lim_{\beta\to 0}\frac{sen(4\beta)}{2\cos\beta sen\beta}=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\cos\beta}\cdot\lim_{\beta\to 0}\frac{sen(4\beta)}{sen\beta}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

$$\lim_{\beta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen(4\beta)}{2\cos\beta sen\beta}=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen(4\beta)}{sen(2\beta)}=\frac{sen\pi}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=0$$

* * * * * * *

Q2- Facciamo riferimento alla **Figura 2**

Abbiamo già precisato che il triangolo ABP è isoscele su AB e quindi $\overline{PB} = \overline{AP} = \frac{c}{2\cos\beta}$.

Per quanto riguarda la misura del cateto BH, dal triangolo rettangolo ABH si ha:
$\overline{BH} = \overline{AB} \cdot sen\hat{BAH} = c \cdot sen\beta$.
Possiamo dunque procedere con lo studio dei limiti richiesti.

- $\lim_{\beta\to 0} \frac{\overline{BH}}{\overline{PB}} = \lim_{\beta\to 0} \frac{c \cdot sen\beta}{\frac{c}{2\cos\beta}} =$

  $\lim_{\beta\to 0} 2sen\beta\cos\beta = 0$

- $\lim_{\beta\to \frac{\pi}{4}} \frac{\overline{BH}}{\overline{PB}} = \lim_{\beta\to \frac{\pi}{4}} 2sen\beta\cos\beta =$

  $\lim_{\beta\to \frac{\pi}{4}} sen(2\beta) = 1$

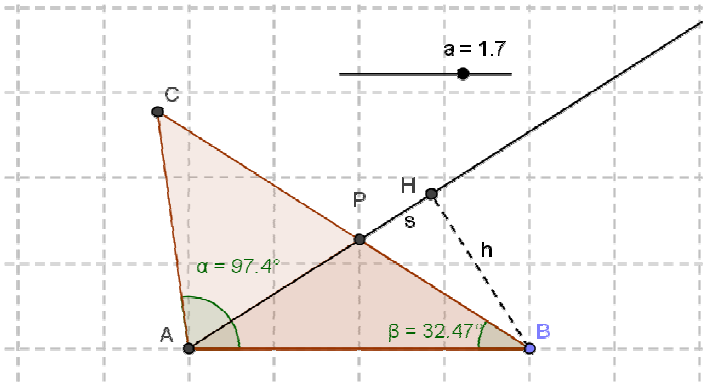

Figura 2

Per gli utenti di GeoGebra

Si può aprire la figura dinamica lanciando l'applicazione con un clic qui ed osservare come si modifica la figura e le ampiezze degli angoli del triangolo ABC mentre varia l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C = \beta$. Per ottenere la dinamica basta trascinare lo **slider** che appare in figura.

I valori dello **slider** variano nell'intervallo $\left[0;\frac{3}{4}\pi\right]$.

Facciamo notare che l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C = \alpha$, con la condizione imposta nel problema $B\hat{A}C = 3A\hat{B}C$, espressa in radianti, varia proprio nell'intervallo indicato. Nella costruzione della figura è stato assegnato allo slider come dominio di variabilità quello dell'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C = \alpha$ espressa in radianti.

Discussione geometrica del problema

Osserviamo che con la condizione imposta nel testo per il triangolo $B\hat{A}C = 3A\hat{B}C$, il valore dell'ampiezza dell'angolo β deve essere compreso tra 0° e 45°, estremi esclusi (in radianti tra 0 e π/4) e ciò perché la somma dei due angoli nei vertici A e B deve essere minore di 180°.

Osservazione sul limite per β→0

Se si verifica la condizione β=0 il triangolo degenera nel doppio segmento AB, con il punto C che va sul lato AB, in una posizione interna al segmento AB. Con l'applicazione GeoGebra, una volta aperta la figura, per ottenere il triangolo degenere corrispondente si deve trascinare lo **slider** verso sinistra e portarlo verso l'estremo inferiore 0 (zero).

Osservazione sul limite per β→π/4

Se si verifica la condizione β=π/4 il triangolo degenera con il vertice C che si allontana all'infinito; i lati AC e BC diventano paralleli. Con l'applicazione GeoGebra, si realizza la figura corrispondente trascinando lo **slider verso destra** e portandolo verso l'estremo superiore del dominio di variabilità che è 2,356≈3π/4.