Semicirconferenza-Limiti

Problema

Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e centro O, condurre dal punto A due corde AC, AD in modo che l'angolo al centro COD abbia ampiezza π/3. Tracciare la semiretta s tangente alla semicirconferenza in A e su detta semiretta prendere un punto E.

Scrivere in funzione dell'ampiezza dell'angolo $E\hat{A}D$ il rapporto tra la misura dell'area del triangolo CAD e il quadrato della misura del segmento CD. Studiare il limite del rapporto suddetto quando il punto C tende al punto B.

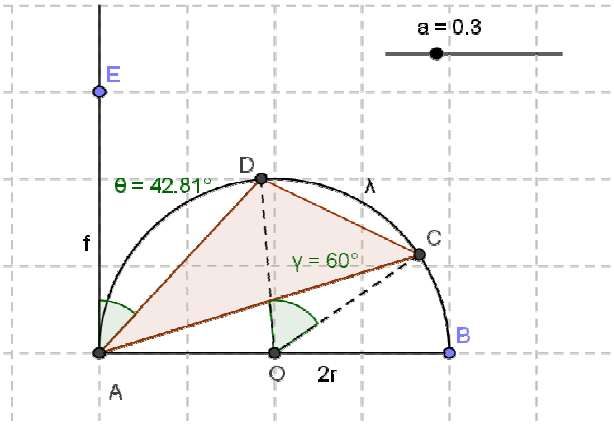
Soluzione

$\overline{AB} = 2r$, $E\hat{A}D = \theta$, $C\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$,

$$B\hat{A}C = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \frac{\pi}{3} - \theta$$

$$\overline{AC} = 2r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

$$\overline{AD} = 2r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2r \cdot sen\theta$$



Dal teorema della corsa si deduce che

$$\overline{CD} = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = r.$$

Area del triangolo ACD:

$$S(ACD) = \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot sen C\hat{A}D = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot sen\theta \cdot 2r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = r^2 sen\theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

Studio del limite

Osserviamo che se C→B allora $\theta \to \frac{\pi}{3}$. Pertanto si ha:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \frac{r^2 sen\theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Operatività con GeoGebra (apri la figura)

Costruzione della figura

1) Disegnare la semicirconferenza di diametro AB, con A nell'origine degli assi e B fissato a piacere sull'asse positivo delle ascisse. Sia O il centro del diametro AB.
2) Definire lo **slider**: a=1. Lo slider rappresenterà l'ampiezza dell'angolo che la retta per l'origine (estremo A del diametro della semicirconferenza) forma con il diametro stesso, che si trova sull'asse x.
3) Definire per lo slider come dominio [0;π/3] con[0;Pi/3]
4) Inserire l'equazione della retta s_1:y=tan(a)x
5) Inserire l'equazione della retta s_2:y=tan(a+Pi/6)x
6) Intersecare s_1 ed s_2 con la semicirconferenza per trovare i punti C e D.
7) L'angolo al centro COD misura π/3 perché è il doppio dell'angolo alla circonferenza CAD
8) Tracciare la retta tangente in A alla semicirconferenza e fissare il punto E sulla parte di retta contenuta nello stesso semipiano della semicirconferenza.

9) Disegnare la semiretta AE.
10) Nascondere la retta AE
11) Tracciare i raggi OC, OD
12) Definire il triangolo COD
13) Tracciare la corda CD
14) Nascondere gli elementi superflui sul foglio di lavoro (come gli assi cartesiani, le rette s_1, s_2, le diverse etichette,…)
15) Per osservare la dinamica della figura trascinare lo slider