Rettificazione di un arco di circonferenza

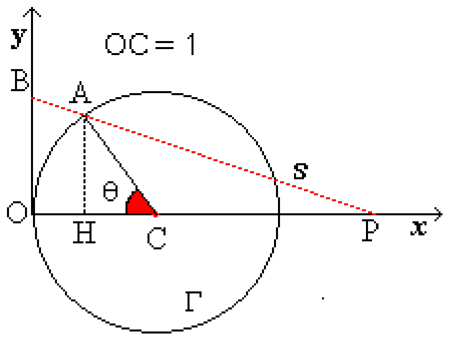
Introduzione

Vogliamo illustrare un metodo che permette di rettificare un arco di circonferenza. Il metodo presentato utilizza strumenti della geometria analitica del piano e strumenti di calcolo differenziale. Esso rappresenta pertanto un'occasione didattica significativa che evidenzia gli stretti legami che sussistono tra diversi settori della matematica ed offre allo studente la possibilità di richiamare concetti studiati in tempi e anni diversi nel proprio corso di studi, nonché di verificare il grado di profondità con cui ha assimilato le conoscenze e le competenze necessarie nei settori della geometria analitica, della goniometria e dell'analisi matematica.

Problema

Considerato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano *x*Oy, si costruisca la circonferenza Γ di centro C e raggio unitario tangente nell'origine all'asse y, con il centro avente ascissa positiva. Si prenda sulla circonferenza il punto A e sia θ la misura dell'angolo $O\hat{C}A$. Sull'asse delle ordinate si consideri il punto B in modo che la misura del segmento OB sia uguale a quella dell'arco OA e si tracci la retta **s** congiungente i punti B ed A. La retta ***s*** interseca l'asse delle ascisse nel punto P. Studiare la posizione limite cui tende P quando l'ampiezza θ tende a zero, cioè quando il punto A→O. (Vedi figura)

Rettificazione di un arco di circonferenza



Soluzione

Nella soluzione del problema consideriamo per l'angolo θ la misura in radianti. Siamo interessati a scrivere l'equazione della retta [A;B] . Troviamo le coordinate dei due punti.

Sappiamo che la misura l di un arco di circonferenza di raggio r corrispondente ad un angolo al centro di ampiezza θ radianti è $l = r\theta$; nel caso in esame $r = 1$ e dunque $l = \theta$. Quindi la misura dell'arco OA è θ e conseguentemente, avendo il segmento OB la stessa misura dell'arco OA, le coordinate del punto B sono (0; θ).

Per le coordinate del punto A consideriamo la sua proiezione H sull'asse delle ascisse ed osserviamo che

$$HC = AC \cdot cos\,\theta = r \cdot cos\,\theta = cos\,\theta,$$

$$HA = AC \cdot sen\theta = r \cdot sen\theta = sen\theta$$

per cui

$$x_A = x_H = x_C - HC = 1 - cos\,\theta,$$

$$y_A = sen\theta$$

Per scrivere l'equazione della retta [A;B] utilizziamo la forma segmentaria:

$$[A;B]:\frac{x}{x_P}+\frac{y}{y_B}=1,\ \text{quindi}\qquad [A;B]:\frac{x}{x_P}+\frac{y}{\theta}=1$$

Imponendo che detta equazione sia soddisfatta dalla coordinate del punto A si determina il valore dell'ascissa del punto P.

$$\frac{x_A}{x_P}+\frac{y_A}{\theta}=1,\ \text{da cui}\ x_P=\frac{\theta\cdot x_A}{\theta-y_A}=\frac{\theta\cdot(1-\cos\theta)}{\theta-sen\theta}.$$

Studio della posizione limite del punto P

Da quanto precede deduciamo che le coordinate del punto P sono $\left(\frac{\theta\cdot(1-cos\,\theta)}{\theta-sen\theta};0\right)$ e si richiede di studiare il valore del limite

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta\cdot(1-cos\,\theta)}{\theta-sen\theta}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e si può risolvere agevolmente applicando la regola di de l'Hôpital due volte oppure applicandola una sola volta e successivamente far ricorso a limiti notevoli.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta\cdot(1-cos\,\theta)}{\theta-sen\theta}\overset{H}{=}\lim_{\theta\to0}\frac{1-cos\,\theta+\theta\cdot sen\theta}{1-cos\,\theta}\overset{H}{=}\lim_{\theta\to0}\frac{sen\theta+sen\theta+\theta\cdot cos\,\theta}{sen\theta}=$$
$$\lim_{\theta\to0}\frac{2sen\theta}{sen\theta}+\frac{\theta\cdot cos\,\theta}{sen\theta}=2+1=3$$

Applicazione

Il risultato trovato indica che la posizione limite del punto P coincide con il punto (3;0). Se non avessimo considerato la circonferenza di raggio unitario la posizione limite di P sarebbe stata coincidente con il punto (3r;0). Questo risultato, unito a considerazioni di analisi permette di rettificare un arco di circonferenza con una certa approssimazione. Precisiamo il concetto.

Fissata la circonferenza di raggio unitario nel riferimento cartesiano *x*Oy come indicato in figura, si individua l'arco OA fissando il punto A, quindi si considera il punto P(3;0) e da questo si conduce la retta [P;A] che interseca l'asse delle ordinate nel punto B. Ebbene, la misura del segmento OB rappresenta con buona approssimazione la misura dell'arco OA nell'ipotesi in cui l'ampiezza θ dell'angolo OCA non sia eccessiva. E' bene avere dei dati quantitativi onde poter valutare la bontà dell'affermazione, avere cioè la possibilità di "quantificare" l'errore di cui ci si discosta dal valore effettivo.

Dall'equazione della retta [A;P] scritta in forma segmentaria

$$[A;P]:\frac{x}{x_P}+\frac{y}{y_B}=1,\ \text{cioè}\ \frac{x}{3}+\frac{y}{y_B}=1,$$

imponendo il passaggio dal punto A(1-cosθ;senθ) si determina il valore dell'ordinata di B.

$$\frac{x_A}{3}+\frac{y_A}{y_B}=1,\ \text{da cui}\ y_B=\frac{3y_A}{3-x_A}=\frac{3sen\theta}{2+\cos\theta}$$

Evidentemente l’ordinata di B rappresenta un’approssimazione della lunghezza dell’arco OA. Vogliamo effettuare un confronto tra il valore effettivo dell’arco e quello ottenuto con l’approssimazione indicata per $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Le elaborazioni ottenute con l’ausilio del foglio elettronico Excel sono riportate nella seguente.

Come si può notare nella prima colonna, per comodità di confronto, sono indicate le misure degli angoli al centro espresse in gradi, mentre nella seconda le relative misure in radianti. I valori in radianti sono riportati con nove cifre decimali. Sono stati considerati archi corrispondenti ad angoli al centro fino all’ampiezza di 90°, con valore iniziale 0° ed incrementati di 5°.

Confronti tra le misure degli archi e le relative rettificazioni corrispondenti ad angoli al centro di ampiezza fino 90°				
Misura di θ in gradi	Misura di θ in radianti	Arco rettificato Ordinata Y_B	Errore di scostamento $y_B - \theta$	err. Perc.
0	0	0,00000000	0,00000000	
5	0,087266463	0,08726643	-0,00000003	0,000032%
10	0,174532925	0,17453202	-0,00000090	0,000517%
15	0,261799388	0,26179250	-0,00000689	0,002631%
20	0,349065850	0,34903664	-0,00002921	0,008369%
25	0,436332313	0,43624243	-0,00008988	0,020599%
30	0,523598776	0,52337289	-0,00022589	0,043141%
35	0,610865238	0,61037123	-0,00049401	0,080870%
40	0,698131701	0,69715540	-0,00097630	0,139844%
45	0,785398163	0,78361162	-0,00178654	0,227469%
50	0,872664626	0,86958684	-0,00307778	0,352688%
55	0,959931089	0,95487979	-0,00505130	0,526214%
60	1,047197551	1,03923048	-0,00796707	0,760799%
61	1,064650844	1,05595982	-0,00869102	0,816326%
62	1,082104136	1,07263547	-0,00946867	0,875024%
63	1,099557429	1,08925425	-0,01030318	0,937030%
64	1,117010721	1,10581285	-0,01119787	1,002486%
65	1,134464014	1,12230780	-0,01215622	1,071538%
70	1,221730476	1,20369497	-0,01803551	1,476226%
75	1,308996939	1,28287278	-0,02612415	1,995738%
80	1,396263402	1,35920030	-0,03706310	2,654449%
85	1,483529864	1,43189319	-0,05163667	3,480663%
90	1,570796327	1,50000000	-0,07079633	4,507034%

Nella quarta colonna sono riportate le differenze tra le misure degli archi rettificati e le misure effettive. Considerandone i valori assoluti si hanno a disposizione gli errori assoluti commessi nelle approssimazioni. Si può osservare che, con esclusione dell’arco nullo, le differenze sono negative e ciò vuol dire che il procedimento geometrico suggerito consente di ottenere per gli archi misure inferiori a quelle effettive. L’entità dell’errore commesso si valuta determinando l’errore relativo, riportato nella quinta colonna. Dall’esame dei valori degli errori relativi emerge che per angoli di ampiezza non superiore a 60° l’errore relativo è minore dell’1%. Volendo entrare nei dettagli si riconosce che per l’angolo di 63° l’errore relativo è dello 0,937% e che per l’angolo di 64% l’errore relativo è dell’1,0024%. E’ interessante notare che se l’ampiezza dell’angolo al centro non supera i 75° l’errore relativo è minore del 2%.