Limiti per Matteo '91

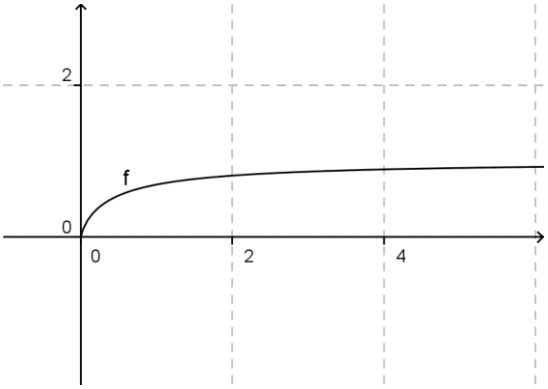
a) $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{2(x-1)}=\frac{e}{2}$

b) $\lim_{x\to 0} x\left(\log(x+1)-\log x\right)$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$.
Infatti,

$$\lim_{x\to 0} x\left(\log(x+1)-\log x\right)=0\left(0-(-\infty)\right)=0(+\infty)$$

Facciamo vedere che il limite esiste ed è zero.
Osserviamo che il punto x=0 è di accumulazione solo a destra per il dominio di definizione della funzione.
Tenendo presente il limite notevole
$\lim_{x\to 0^+} x^r \log x=0$, che sussiste $\forall r>0$,
possiamo scrivere



$$\lim_{x\to 0} x\left(\log(x+1)-\log x\right)=\lim_{x\to 0} x\log(x+1)-\lim_{x\to 0} x\log x=0-0=0$$ C.V.D.

Nella figura a lato è riportato parzialmente il diagramma della funzione $f(x)=x\left(\log(x+1)-\log x\right)$.

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1.$

Si noti che risulta anche $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}=1.$