

Limiti per universitari

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x^2-1}})$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty(\infty - \infty)$. Procediamo con le elaborazioni.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x^2-1}}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sqrt{x^2-1}} (e^{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\sqrt{x}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - 1 \right) = \\ &= +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)} - 1 \right) = +\infty \cdot (e^{+\infty(1-\infty)} - 1) = +\infty(e^{-\infty} - 1) = +\infty(0 - 1) = -\infty \end{aligned}$$

* * * * *

b)⁽¹⁾ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\sqrt{x^2-x}} - e^{\sqrt{x^3+3x}})$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty(\infty - \infty)$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x^2-x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = e^{+\infty} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x^3+3x}} &= e^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

Si può studiare il limite elaborando l'espressione esponenziale come segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\sqrt{x^2-x}} - e^{\sqrt{x^3+3x}}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sqrt{x^3+3x}} (e^{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^3+3x}} - 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sqrt{x^3+3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x\sqrt{1-\frac{1}{x}-x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}} - 1 \right) = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)} - 1 \right) = \\ &= +\infty(e^{-\infty} - 1) = +\infty(0 - 1) = -\infty \end{aligned}$$

* * * * *

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2-2})$

Il limite del secondo fattore si presenta nella forma indeterminata $(\infty - \infty)$ ed occorre elaborare l'espressione complessiva per cercare una forma che permetta di giungere ad una conclusione. Nel caso specifico è necessario procedere con la razionalizzazione del fattore $(x + \sqrt{x^2-2})$.

Elaborazioni

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2-2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x + \sqrt{x^2-2})(x - \sqrt{x^2-2})}{(x - \sqrt{x^2-2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 2)}{(x - \sqrt{x^2-2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - (-x)\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Esercizio assegnato in una prova d'esame di Analisi Matematica I nel Corso di Laurea di Ingegneria Edile e Architettura-Bari

$$\begin{aligned}
 & \text{*****} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4})(x - \sqrt{x^2 - 4})}{(x - \sqrt{x^2 - 4})} = \\
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4}{x - |x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)} = \frac{4}{-\infty \cdot 2} = 0^-
 \end{aligned}$$

$$\text{e) }^{(2)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + |\arctg x|)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}}$$

Per studiare il limite occorre preliminarmente stabilire il tipo di accumulazione per il punto $x=0$.

Osserviamo che la funzione in esame è una funzione potenza e, data la sua struttura, esiste se è soddisfatta la condizione $x^2 + x > 0$; detta

disuguaglianza è verificata per

$(x < -1) \vee (x > 0)$, per cui il punto $x=0$ è di

accumulazione solo a destra per il dominio di definizione.

Ricordiamo ora che la funzione $\arctg x$ assume valori positivi per $x > 0$ e dunque il limite in esame può essere scritto nella seguente forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arctg x)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞ ; per il suo studio passiamo alla forma esponenziale della funzione, tenendo conto della validità dell'uguaglianza

$y = e^{\log y}$, che sussiste $\forall y > 0$.

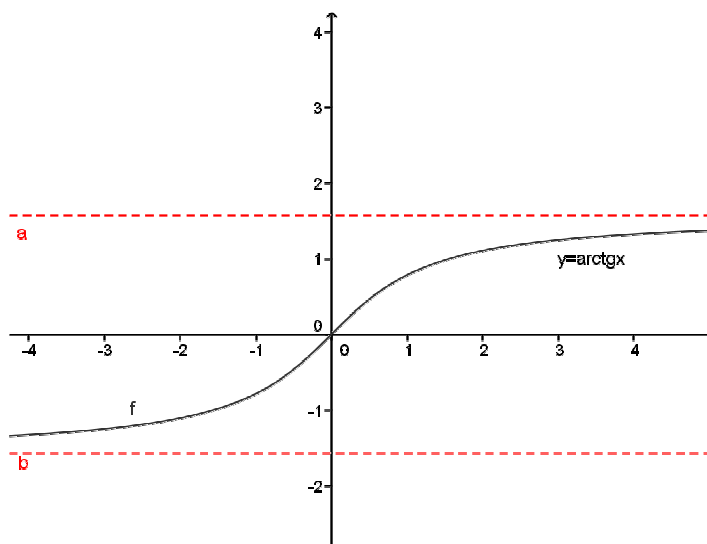
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arctg x)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log \left((1 + \arctg x)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log(1 + \arctg x)}{\sqrt{x^2 + x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log(1 + \arctg x)}{\arctg x} \cdot \frac{\arctg x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}} = \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + x}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

f) Esercizio proposto

Provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctg \sqrt{|x|})^{\frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}} = e$$

Suggerimento: si osservi che il punto $x=0$ è di accumulazione solo a sinistra.



⁽²⁾ Esercizio assegnato in una prova d'esame di Analisi Matematica I nel Corso di Laurea di Ingegneria Edile e Architettura-Bari