Esercizi sui limiti

Studiare i seguenti limiti

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x}-2x$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-x}-2x$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-x^2}-x$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx^2+3x}{5x^2-mx+1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{-3x^2+x}$

Soluzione

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x}-2x$

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞-∞ e per risolverla occorre procedere con la razionalizzazione dell'espressione algebrica. Riportiamo le elaborazioni.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2}=-\frac{1}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=+\infty$

Il limite è direttamente calcolabile. Infatti si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=\sqrt{4(-\infty)^2-(-\infty)}-2(-\infty)=\sqrt{+\infty}+\infty=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-x\right)=+\infty-\infty$

Il limite si presenta in una forma indeterminata, ma è calcolabile ricorrendo alla fattorizzazione della funzione. Riportiamo le elaborazioni:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-1\right)=+\infty\left(\sqrt{4}-1\right)=+\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-x^2}-x\right)$ Il limite non a senso perché il punto x=+∞ non è di accumulazione per il dominio di definizione della funzione. La funzione è definita nell'intervallo [0;1].

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx^2+3x}{5x^2-mx+1}$

Nonostante la presenza del parametro reale m il calcolo del limite si esegue agevolmente.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^2+3x}{5x^2-mx+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(m+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{m}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{m+\frac{3}{x}}{5-\frac{m}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{m+0}{5-0+0}=\frac{m}{5}$$

f) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{-3x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(-5+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(-5+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\infty(2-0+0)}{(-5+0)}=\frac{-\infty}{-5}=+\infty$$