

Esercizi sui limiti

Di seguito sono riportati alcuni limiti. Dopo averli studiati, nei casi in cui il punto x_0 è reale precisare il tipo di discontinuità presentata dalla funzione nello stesso punto.

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1} \right)^n$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+3}{7x+6} \right)^{2x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log(x+2) - \log(x+1))$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{9x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{x}$

Soluzione

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1} \right)^n = 1^\infty$ Forma indeterminata

Elaborazioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3n+1} \right)^n \quad \text{con } 3n+1 = t \rightarrow n = \frac{t-1}{3} \text{ e } (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3n+1} \right)^n = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{t} \right)^{\frac{t-1}{3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{t} \right)^{\frac{t}{3}} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{t} \right)^{-\frac{1}{3}} = (e^{-2})^{\frac{1}{3}} \cdot (1-0)^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+3}{7x+6} \right)^{2x} = 0^+$

Una volta osservato che la base della potenza tende a $\frac{4}{7}$ e ricordate le proprietà della funzione esponenziale si conclude immediatamente che il valore del limite è 0^+ .

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log(x+2) - \log(x+1)) = \infty(\infty - \infty)$

Il fattore $\log(x+2) - \log(x+1)$, per $x \rightarrow +\infty$ si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Si può aggirare l'ostacolo applicando la proprietà della funzione logaritmica relativa al logaritmo del prodotto di due fattori positivi:

$$\log(x+2) - \log(x+1) = \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right). \text{ Ora risulta } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = \log 1 = 0$$

e quindi il limite in esame si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Il limite può essere

studiato trasformando ulteriormente la funzione e sfruttando il limite notevole $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$.

Riportiamo le elaborazioni.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left[\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{-1}\right] = \log(e \cdot 1) = 1$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{9x} = \frac{0}{0}$ Il limite si presenta in una forma indeterminata.

Dopo una semplice trasformazione della funzione, il limite è quasi immediato, una volta ricordato il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e quello più generale, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)} = 1$, allorché si abbia

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$. Riportiamo le elaborazioni.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{10x} = \frac{10}{9}$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione ha nel punto $x=0$ una discontinuità di terza specie.

Operatività con Geogebra

Nella figura a lato sono rappresentati il diagramma

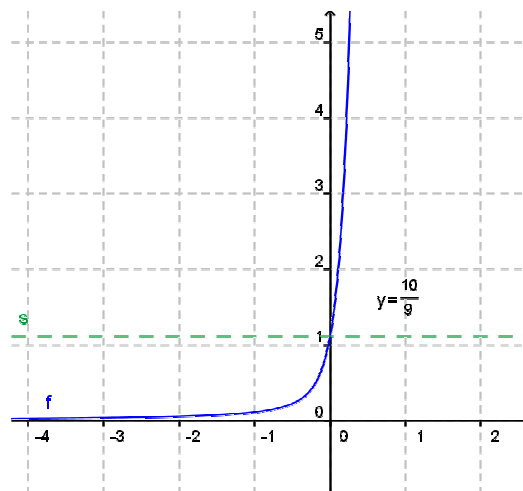
della funzione $y = \frac{e^{10x} - 1}{9x}$ e quello della retta

$s: y = \frac{10}{9}$, in un intorno completo del punto $x=0$.

La funzione è stata inserita tramite l'espressione $y=(e^{(10 x)} - 1) / (9 x)$ digitata nella barra della formula.

Da notare che nell'area del grafico figura anche il testo rappresentativo dell'equazione cartesiana della retta s . Detta forma algebrica è il risultato nel

linguaggio Latex del seguente comando: $y=\frac{10}{9}$



e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{x} = \frac{0}{0}$

Il limite si risolve riconducendosi al limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \text{ con } a > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2^x - 1)}{x} = 2 \log 2$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione ha nel punto $x=0$ una discontinuità di terza specie.