# Esercizi sui limiti

Di seguito sono riportati alcuni limiti. Dopo averli studiati, nei casi in cui il punto $x_0$ è reale precisare il tipo di discontinuità presentata dalla funzione nello stesso punto.

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(\cos^2 x\cdot senx\right)}{\cos^2 x}$

b) $\lim_{x\to+\infty} xsen\left(\frac{\pi}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{arcsen(3x)}{x+arctg(2x)}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$

## Soluzione

**a)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(\cos^2 x\cdot senx\right)}{\cos^2 x}=-\infty$

Osserviamo che l'argomento della funzione logaritmica per $x\to\frac{\pi}{2}$ tende a zero e in un intorno completo del punto è positivo. Il numeratore tende dunque a -∞. Il denominatore tende a zero, mantenendosi positivo. Il limite è dunque della forma λ/0, con λ≠0 per cui si ha:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(\cos^2 x\cdot senx\right)}{\cos^2 x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=\frac{\pi}{2}$ presenta una discontinuità di seconda specie.

**b)** $\lim_{x\to+\infty} xsen\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}\cdot\pi=\lim_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t}\cdot\pi=\pi$

Osservazione- Il limite è stato calcolato operando una semplice trasformazione dell'espressione della funzione ed effettuando un cambio di variabile per ricondurlo ad un limite notevole. Facciamo presente che la sostituzione di variabile non è affatto necessaria.

**c)** $\lim_{x\to 0} \frac{arcsen(3x)}{x+arctg(2x)}=\frac{0}{0}$

Si può risolvere la forma indeterminata operando come segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsen(3x)}{x+arctg(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{arcsen(3x)}{3x}}{\frac{x}{x}+2\cdot\frac{arctg(2x)}{2x}}=\frac{3\cdot 1}{1+2\cdot 1}=1$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x$=0 presenta una discontinuità di terza specie.

**d)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}=\frac{0}{0}$

Considerato che il punto $x=2$ è di accumulazione a sinistra e a destra, per la presenza del valore assoluto si devono studiare i due limiti laterali.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{-(x-2)}=-4\,;\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)}=4$$

Concludiamo che **il limite in esame non esiste** perché i valori dei limiti laterali sono diversi.

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=2$ presenta una discontinuità di prima specie, perché i due limiti laterali esistono, sono finiti e diversi tra loro.