

Esercizi sui limiti

Di seguito sono riportati alcuni limiti. Dopo averli studiati, precisare il tipo di discontinuità presentata dalla funzione nello stesso punto.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{1 - x^2}$ | b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 7x + 8}{x^3 + x^2 + x + 1}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x-16}}{x^2 - 256}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - 2}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \tan(5x)}{4x + \sin(6x)}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{(2x-1)^2 - 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2\sin x)}{\tan(3x)}$ | |

Soluzione

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{-(x+1)} = -3$$

Classificazione del punto di discontinuità

Poiché il limite per $x \rightarrow 1$ esiste ed è finito, la funzione nel punto $x=1$ presenta una discontinuità di terza specie.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 7x + 8}{x^3 + x^2 + x + 1}$ Per lo studio del limite si devono scomporre in fattori i polinomi presenti al numeratore ed al denominatore. Posto $A(x) = x^3 + 7x + 8$ e $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, risulta $A(x) : (x+1) = x^2 - x + 8$, mentre, procedendo con raccoglimenti parziali si ha $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$. Possiamo ora calcolare il limite in esame.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 7x + 8}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 8)}{\cancel{(x+1)}(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 8}{x^2 + 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Classificazione del punto di discontinuità

Poiché il limite per $x \rightarrow -1$ esiste ed è finito, la funzione nel punto $x=-1$ presenta una discontinuità di terza specie.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x-16}}{x^2 - 256}$$

Osserviamo che il punto $x=16$ è di accumulazione solo a destra per il dominio di definizione della funzione che è $]16; +\infty[$. Per lo studio del limite si può procedere scomponendo in fattori il denominatore ed effettuando una semplificazione.

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x-16}}{x^2 - 256} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x-16}}{(x-16)(x+16)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x-16}(x+16)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Classificazione del punto di discontinuità

Poiché il limite studiato esiste ma è infinito, la funzione nel punto $x=16$ presenta una discontinuità di seconda specie.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-2} = \frac{0}{0}$ Per lo studio del limite è necessario procedere alla razionalizzazione

delle due espressioni che figurano al numeratore e al denominatore al fine di estrarre il fattore infinitesimo $(x-1)$ o $(1-x)$. Sussistono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - \sqrt{8x+1})(3 + \sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x} + 2)}{(3 + \sqrt{8x+1})(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x} + 2)} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(9 - 8x - 1)(\sqrt{5-x} + 2)}{(3 + \sqrt{8x+1})(5 - x - 4)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(1-x)(\sqrt{5-x} + 2)}{(3 + \sqrt{8x+1})(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(\sqrt{5-x} + 2)}{(3 + \sqrt{8x+1})} = \frac{8 \cdot 4}{3+3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=1$ presenta una discontinuità di terza specie.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \tan(5x)}{4x + \sin(6x)} = \frac{0}{0}$

Per lo studio di questo limite, dopo aver diviso numeratore e denominatore per x , si elabora ulteriormente la frazione in modo da ricondursi a dei limiti notevoli. Il lavoro procede applicando i teoremi su limite della somma e quello sul limite del rapporto. Riportiamo le elaborazioni.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \tan(5x)}{4x + \sin(6x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} + \frac{\tan(5x)}{5x} \cdot 5}{4 \frac{x}{x} + 6 \cdot \frac{\sin(6x)}{6x}} = \frac{3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{5x} \cdot 5}{4 \frac{x}{x} + 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{6x}} = \\ \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 5}{4 + 6 \cdot 1} &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=0$ presenta una discontinuità di terza specie.

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = \frac{0}{0}$ Per lo studio di questo limite si può procedere sfruttando

immediatamente una formula goniometrica e successivamente un limite notevole. Un procedimento alternativo consiste nell'effettuare un cambio di variabile.

Elaborazioni

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \cos(\pi x)) \cancel{(1 + \cos(\pi x))}}{1 + \cancel{\cos(\pi x)}} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \cos(\pi x)) &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

Con il cambio di variabile: $x-1=t$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\pi t + \pi)}{1 + \cos(\pi t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\pi t)}{1 - \cos(\pi t)} = \dots = 2$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=1$ presenta una discontinuità di terza specie.

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{(2x-1)^2 - 1} = \frac{0}{0}$ Il limite si riconduce velocemente ad un limite notevole.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{(2x-1)^2-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{4x(x-1)} = -1$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=0$ presenta una discontinuità di terza specie.

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2\operatorname{sen}x)}{\operatorname{tg}(3x)} = \frac{0}{0}$ Si elabora la funzione per far figurare dei limiti notevoli.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2\operatorname{sen}x)}{\operatorname{tg}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2\operatorname{sen}x)}{2\operatorname{sen}x \cdot \frac{\operatorname{tg}(3x)}{3x}} \cdot 2\operatorname{sen}x = \frac{2}{3}$$

Classificazione del punto di discontinuità

La funzione nel punto $x=0$ presenta una discontinuità di terza specie.