

Esercizi sui limiti dedotti dai limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1;$$

e dalle loro generalizzazioni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(1+\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1, \quad \text{essendo } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x(x-1)} - 1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x-1)}{3} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x^2} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(1-x)(1+x)} - 1}{(1-x)(1+x)} \cdot (1+x) = -1 \cdot 2 = -2$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\frac{1}{2}x - e^{x^2-4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\frac{1}{2}x - 1 + 1 - e^{x^2-4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(e^{x^2-4} - 1)}{(x+2)(x-2)} \cdot (x-2) + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)}{2(x+2)} =$
 $-1(-2-2) - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{e^{2x-1} - 1}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{e^{2x-1} - 1}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{e^{2x-1} - 1}{2x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3(x+1)} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{(x-1)(x+1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{4x} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2-3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x(x-3))}{2 \cdot x(x-3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{2 \cdot t} = \frac{1}{2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^2+x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+(x^2+x-2))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+(x^2+x-2))}{(x^2+x-2)} \cdot \frac{x^2+x-2}{x-1} =$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = 1 \cdot 3 = 3$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^2+3x-3)}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+(x^2+3x-4))}{(x^2+3x-4)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+3x-4)}{x^2-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x(x-1)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x} = 5$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log(2x^2 + x)}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log(1 + (2x^2 + x - 1))}{(2x^2 + x - 1)} \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x^2 + x - 1)}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+4)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+4} = -1$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^3 + x + 1)}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (x^3 + x))}{(x^3 + x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x^2 + 1)}{\cancel{x}(x + 5)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x + 5} =$$

$$1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x^2 - x}} \quad \text{Prima di accingersi ad effettuare delle elaborazioni è opportuno}$$

stabilire se il limite ha senso, cioè se il punto è di accumulazione per il dominio di definizione della funzione.

Osserviamo che la presenza delle due radici quadrate, una delle quali al denominatore, richiedono che siano soddisfatte contemporaneamente le due disequazioni

$$x \geq 0, \quad x^2 - x > 0.$$

Si riconosce che l'insieme intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni è l'intervallo $]1; +\infty[$ per il quale il punto $x=0$ non è di accumulazione.

Concludiamo che il limite in esame non ha senso.

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sqrt{-x})}{\sqrt{x^2 - x}} \quad \text{Determinando il dominio di definizione della funzione si riconosce}$$

che è l'intervallo $] -\infty; 0[$ e dunque che il punto $x=0$ è di accumulazione a sinistra.

Procediamo con lo studio del limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1 + \sqrt{-x})}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1 + \sqrt{-x})}{\sqrt{x(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1 + \sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2 \cos x)}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2 \cos x)}{x^2 \cos x} \cdot \frac{x \cos x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \operatorname{tg}(3x))}{\operatorname{sen}(6x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \operatorname{tg}(3x))}{\operatorname{tg}(3x)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(3x)}{3x} \cdot \frac{2 \cdot 3x}{\operatorname{sen}(6x)} \cdot \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} \cdot$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^{-x})}{e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^{-x})}{e^{-x} \cdot e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^{-x})}{e^{-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x =$$

$$1 \cdot (+\infty) = +\infty$$