Limiti, infiniti, infinitesimi

Es_1)

1.1) Proviamo che risulta: $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3+n}\right)^{2n}=e^{-4}$

Lo studio del limite si effettua ricordando il limite notevole $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}=e^{\alpha}$, $\forall\alpha\in R$,

della successione di termine generale $a_n=\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}$. Per brevità nei calcoli effettuiamo la sostituzione di variabile: $n+3=t$.

$n+3=t\Rightarrow n=t-3$

$n\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty$

Il limite assume la seguente forma:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3+n}\right)^{2n}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{t}\right)^{2(t-3)}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{t}\right)^{2t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{t}\right)^{-6}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{t}\right)^{t}\right]^{2}\cdot 1=\left(e^{-2}\right)^{2}=e^{-4}$$

1.2) Proviamo che risulta: $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}=e^{2}$

Per lo studio di questo limite basta tener presente il limite notevole

$\lim_{x\to0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}$, $\forall\alpha\in R$.

Infatti, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{4}=\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{4}=e^{2}$$

1.3) Proviamo che risulta: $\lim_{x\to1}\frac{\log\left(4x^2-3x\right)}{sen\left(x^2-x\right)}=5$

Per lo studio del limite si devono tenere presenti i seguenti limiti notevoli

a) $\lim_{x\to0}\frac{senx}{x}=1$, b) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

ed i limiti notevoli generalizzati che da essi si ottengono,

a.1) $\lim_{x\to x_0}\frac{sen\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$, b.1) $\lim_{x\to x_0}\frac{\log(1+\varphi(x))}{\varphi(x)}=1$,

allorché si abbia $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

Infatti possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log\left(4x^2-3x\right)}{sen\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\log\left(1+\left(4x^2-3x-1\right)\right)}{sen\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\log\left(1+\left(4x^2-3x-1\right)\right)}{\left(4x^2-3x-1\right)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{sen\left(x^2-x\right)}{\left(x^2-x\right)}}\cdot$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(4x^2-3x-1\right)}{\left(x^2-x\right)}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(4x+1)\,\cancel{(x-1)}}{x\,\cancel{(x-1)}}=5$$

Es_2) Proviamo che risulta: $\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+sen^2x}-\cos(2x)}{x^2-\pi^2}=0$

Soluzione

Osserviamo intanto che il limite si può decomporre nella seguente forma

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+sen^2x}-1}{sen^2x}\cdot\frac{sen^2x}{x^2-\pi^2}+\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(2x)}{x^2-\pi^2}; \qquad (*)$$

abbiamo cioè scritto il limite come somma di due limiti. Vogliamo provare che ciascuno dei limiti componenti vale zero, dopo di che, in virtù del teorema su limite della somma, varrà anche zero il limite in esame.

Studio del primo limite

Cominciamo con il far presente che sussiste la seguente implicazione notevole

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{[1+\varphi(x)]^{\alpha}-1}{\varphi(x)}=\alpha,$$

per cui possiamo scrivere

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+sen^2x}-1}{sen^2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\left(1+sen^2x\right)^{\frac{1}{2}}-1}{sen^2x}=\frac{1}{2}.$$

Per quanto concerne il limite del secondo fattore della prima parte effettuiamo la sostituzione di variabile ponendo $x-\pi=t$, quindi sussiste l'implicazione $x\to\pi\Rightarrow t\to 0$.

Possiamo allora scrivere

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sen^2x}{x^2-\pi^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\left[sen(t+\pi)\right]^2}{(t+\pi)^2-\pi^2}=\lim_{t\to 0}\frac{sen^2t}{t(t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{sent}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sent}{(t+2\pi)}=1\cdot 0=0$$

Pertanto risulta

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+sen^2x}-1}{sen^2x}\cdot\frac{sen^2x}{x^2-\pi^2}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Passiamo ora a studiare il secondo limite

Anche in questo caso cambiamo la variabile, effettuando la sostituzione operata prima. Prima di riportare le elaborazioni ricordiamo che sussiste il seguente limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

e che più in generale sussiste l'implicazione

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos\varphi(x)}{\varphi(x)}=0$$

Ciò premesso, si ha:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(2x)}{x^2-\pi^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\left(2(t+\pi)\right)}{t(t+2\pi)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\left(2t\right)}{2t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{2}{t+2\pi}=0\cdot\frac{1}{\pi}=0$$

Quindi anche il secondo limite che figura nella (*) vale zero e dunque, per il teorema sul limite della somma, vale zero anche il limite in esame.

Es_3) Studiare al variare del parametro reale α il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot arctg\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$$

Soluzione

Il limite è parametrico. Il risultato dipende dal valore che si assegna al parametro α.
Per il suo studio è necessario preliminarmente semplificarlo.
Notiamo che l'argomento della funzione arcotangente è infinitesimo per x→+∞ e che dal limite notevole,

$$\lim_{y\to0}\frac{arctgy}{y}=1,$$

nonché dall'implicazione

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{arctg\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$$

Sussistono intanto le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot arctg\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot arctg\left(\frac{2}{x(x+2)}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\left(\frac{2}{x(x+2)}\right)}{\frac{2}{x(x+2)}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\alpha}}{x(x+2)}=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\alpha}}{x(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\alpha}}{x(x+2)}$$

Per quanto concerne il limite residuo notiamo che il denominatore è un infinito del secondo ordine e che al variare del parametro α sussistono i seguenti casi:

a) con α>2 il valore del limite è *l*=+∞;
b) con α=2 il valore del limite è *l*=2;
c) con α<2 il valore del limite è *l*=0.

Es_4) Determinare la parte principale e la parte complementare del seguente infinito

$$f(x)=\frac{5x^3-x}{x+1},\ \text{per}\quad x\to+\infty$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione per $x\to+\infty$ è un infinito del secondo ordine. Infatti, risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-x}{x^2\cdot(x+1)}=5$$

Dal valore del limite ottenuto si deduce che la parte principale dell'infinito è $5x^2$ e che la parte complementare è

$$\varphi(x)=f(x)-5x^2=\frac{5x^3-x}{x+1}-5x^2=-\frac{5x^2+x}{x+1}$$

La parte complementare per $x\to+\infty$ è un infinito del primo ordine.

Es_5) Determinare la parte principale e la parte complementare dell'infinitesimo

$$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x+2}\text{, per } x\to 0$$

Soluzione

Osserviamo che x=0 è di accumulazione solo a destra per il dominio della funzione.
Confrontando la funzione con l'infinitesimo principale x^r, con $r>0$, per $x\to 0^+$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^r}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^r\left(x+2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x^r}$$

Il limite assume valore finito diverso da zero solo con $r=\frac{1}{2}$ ed il valore è proprio $\frac{1}{2}$.

Concludiamo che l'ordine dell'infinitesimo è $\frac{1}{2}$.

La parte principale è $\frac{1}{2}\sqrt{x}$;

parte complementare $-\frac{x\sqrt{x}}{2(x+2)}$