Esercizi sui limiti notevoli

Verificare che sussistono i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)+sen(4x)}{5x+tg(6x)}=\frac{7}{11}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(3x)}{tg(6x)}=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(3x)-x}{tg(2x)+4x}=\frac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x^2)}{1-\cos x}=6$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{1-\cos\sqrt{x}}=2$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{sen^2(\pi x)}{1+\cos(\pi x)}=2$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{x(1-cosx)}=1$

8) $\lim_{x\to+\infty} x\cdot arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=1$

9) $\lim_{x\to\pi}\frac{senx\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{tg^2x}=\frac{1}{2}$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{tg\sqrt{x^2-1}}{sen(\pi x)}=-\infty$

Soluzione

1) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)+sen(4x)}{5x+tg(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{sen(3x)}{3x}+4\cdot\frac{sen(4x)}{4x}}{\frac{5x}{x}+6\cdot\frac{tg(6x)}{6x}}=\frac{3\cdot 1+4\cdot 1}{5+6\cdot 1}=\frac{7}{11}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(3x)}{tg(6x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsen(3x)}{3x}\cdot\frac{6x}{tg(6x)}\cdot\frac{3}{6}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(3x)-x}{tg(2x)+4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{arcsen(3x)}{3x}-\frac{x}{x}}{2\cdot\frac{tg(2x)}{2x}+4\frac{x}{x}}=\frac{3-1}{2+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x^2)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x^2)}{3x^2}\cdot\frac{3}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=1\cdot\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{1-\cos\sqrt{x}}=1\cdot 2=2$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{sen^2(\pi x)}{1+\cos(\pi x)}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$ Cambio di variabile: $x-1=t\Rightarrow x=t+1$. Il limite diventa:

$$\lim_{t\to 0}\frac{sen^2\left(\pi(t+1)\right)}{1+\cos\left(\pi(t+1)\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{sen^2\left(\pi+\pi t\right)}{1+\cos\left(\pi+\pi t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{sen^2\left(\pi t\right)}{1-\cos\left(\pi t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{sen^2\left(\pi t\right)}{\left(\pi t\right)^2}\cdot\frac{\left(\pi t\right)^2}{1-\cos\left(\pi t\right)}=2$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{x(1-cosx)}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{x(1-cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{senx}{\cos x}-senx}{x(1-cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\cdot\frac{\cancel{(1-\cos x)}}{\cos x\cancel{(1-cosx)}}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

8) $\lim_{x\to+\infty} x\cdot arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \infty\cdot arcsen 0 = \infty\cdot 0$ Si tratta di una forma indeterminata. Procediamo come segue:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{\frac{x}{x^2+1}} = 1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) = 1-\frac{1}{\infty} = 1$$

9) $\lim_{x\to\pi}\frac{sen x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{tg^2 x} = \frac{0}{0}$ Procediamo con il cambio di variabile ponendo $x-\pi = t \Rightarrow x = \pi + t$

Osserviamo che se $x\to\pi$ allora $t\to 0$ e pertanto il limite in esame diventa:

$$\lim_{t\to 0}\frac{sen(\pi+t)\cdot\cos\left(\frac{\pi+t}{2}\right)}{tg^2(\pi+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{-sent\cdot\left(-sen\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{tg^2 t} = \lim_{t\to 0}\frac{sent}{t}\cdot\frac{sen\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t}{tgt}\right)^2 = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{tg\sqrt{x^2-1}}{sen(\pi x)} = \frac{0}{0}$. Osserviamo che il punto *x*=1 è di accumulazione solo a destra; ciò discende dalla condizione di esistenza che deve essere imposta per il radicale quadratico:
$x^2-1\geq 0$, soddisfatta per $(x\leq -1)\vee(x\geq 1)$.

Ciò premesso, si può procedere trasformando la funzione al fine di applicare un primo limite notevole:

$$\lim_{x\to 1}\frac{tg\sqrt{x^2-1}}{sen(\pi x)} = \lim_{x\to 1}\frac{tg\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{sen(\pi x)} = 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{sen(\pi x)}$$

Per studiare il limite residuo è opportuno operare un cambio di variabile. Poniamo: $x-1=t$, da cui $x=1+t$; pertanto se $x\to 1$, allora $t\to 0$. Precisamente, avendo osservato che può essere $x\to 1^+$, perché il punto x=1 è di accumulazione solo a destra per il dominio di definizione della funzione in oggetto, allora sarà $t\to 0^+$. Si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{sen(\pi x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{(t+1)^2-1}}{sen(\pi(t+1))} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t^2+2t}}{sen(\pi+\pi t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt{t+2}}{-sen(\pi t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt{t+2}}{-t\cdot\pi\frac{sen(\pi t)}{\pi t}} =$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t+2}}{-\pi\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{2}}{-\pi\cdot 0^+} = -\infty$$