Verifica di limiti

Due esercizi: un limite finito ed uno infinito in punti all'infinito

(1)

Esercizio_2- Verificare che sussistono i limiti indicati

4a) $\lim_{x\to+\infty} 3^{\frac{1}{x}} = 1$

Soluzione

La funzione è esponenziale ed è definita per i valori reali $x\neq0$; dunque il dominio è $A = R_0$. Per la verifica del limite occorre provare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall\varepsilon>0, \exists \bar{x}_\varepsilon \in R: x > \bar{x}_\varepsilon \wedge x\in A \Rightarrow \left|3^{\frac{1}{x}}-1\right|<\varepsilon$$

Risolviamo dunque la disequazione $\left|3^{\frac{1}{x}}-1\right|<\varepsilon$, con $\varepsilon>0$ arbitrariamente scelto.

$$\left|3^{\frac{1}{x}}-1\right|<\varepsilon \to \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} > 1-\varepsilon \\ 3^{\frac{1}{x}} < 1+\varepsilon \end{cases}$$

Osserviamo che essendo interessati a valori $x\to+\infty$, possiamo limitarci a risolvere il sistema per $x>0$. Procediamo.

Prima disequazione del sistema

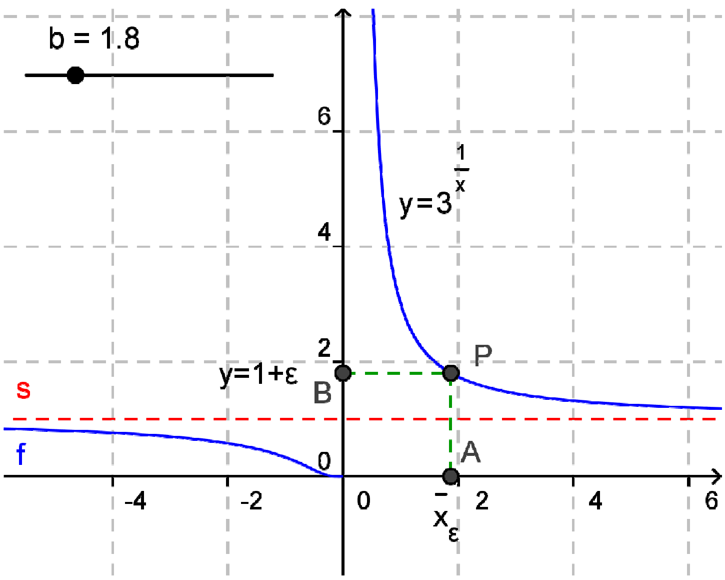
Per $0<\varepsilon<1$, la disequazione è equivalente alla seguente $\frac{1}{x} > \log(1-\varepsilon)$; a questo punto notiamo che essendo $0<1-\varepsilon<1$ risulta $\log(1-\varepsilon)<0$ e quindi è senz'altro vero che $\frac{1}{x}>\log(1-\varepsilon)$ con $x>0$.

Se invece si sceglie $\varepsilon\geq1$, visto che $1-\varepsilon\leq0$, la disuguaglianza $3^{\frac{1}{x}}>1-\varepsilon$ è senz'altro verificata per ogni $x>0$, giacché il primo membro è positivo.

Conclusione- Comunque si scelga ε>0 la prima disequazione è senz'altro soddisfatta nell'intervallo]0;+∞[.

Seconda disequazione del sistema

La disequazione $3^{\frac{1}{x}}<1+\varepsilon$ è equivalente alla seguente $\frac{1}{x}<\log_3(1+\varepsilon)$, che , essendo i due membri positivi, si trasforma nella seguente $x>\frac{1}{\log_3(1+\varepsilon)}$.



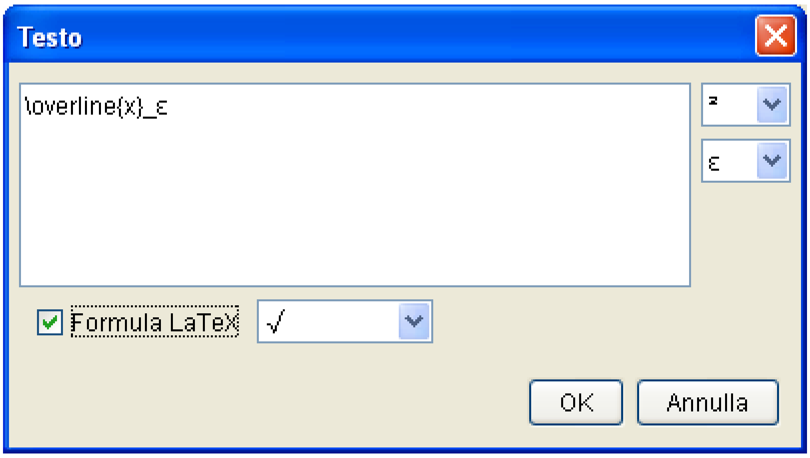
Confrontando gli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni del sistema, notiamo che per ∀ε>0 entrambe le disequazioni sono soddisfatte per $x>\frac{1}{\log_3(1+\varepsilon)}$ e dunque possiamo

---

(1) Esercizio assegnato nel compito in classe 5I-11-11-2010 del Liceo Scientifico "G. Stampacchia" - Tricase

assumere $\overline{x}_\varepsilon = \dfrac{1}{\log_3(1+\varepsilon)}$, o un valore maggiore di esso, per attestare che è soddisfatta la proposizione richiesta dalla definizione di limite. C.V.D.

Operatività con Geogebra



1) Per ottenere nella finestra grafica il testo $\overline{x}_\varepsilon$, digitare nella finestra di testo \overline{x}_{ε} e spuntare la casella di controllo per attivare il linguaggio LaTeX.
2) Per ottenere il testo della funzione $y = 3^{\frac{1}{x}}$ digitare l'espressione y=3^{\frac{1}{x}}, avendo sempre cura che sia attiva la casella di controllo del linguaggio LaTeX. Notare la presenza di parentesi graffe annidate; la coppia più esterna ha come argomento l'esponente 1/x dell'esponenziale.

[Apri l'applicazione con GeoGebra](). Trascinare lo **slider** per osservare la dinamica sulla figura.

4b) $\lim_{x\to-\infty} 1-\sqrt{-x} = -\infty$

Soluzione

La funzione da studiare è un'irrazionale intera, definita nell'intervallo A=]-∞;0]. Per la verifica del limite occorre provare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall M > 0, \exists \overline{x}_M \in R : x < \overline{x}_M \wedge x \in A \Rightarrow 1-\sqrt{-x} < -M$$

Risolviamo dunque la disequazione $1-\sqrt{-x} < -M$, con M positivo scelto arbitrariamente.
La disequazione si trasforma nella seguente $\sqrt{-x} > 1+M$, e tenendo conto che i due membri sono non negativi, si possono elevare al quadrato ottenendo $x < -(1+M)^2$. Pertanto, assumendo come $\overline{x}_M$ il valore numerico $-(1+M)^2$, oppure uno minore o uguale ad esso, possiamo notare che per $x < \overline{x}_M$ è soddisfatta la proposizione richiesta dal limite. Il limite è perciò verificato.