

Esercizi sulle successioni numeriche⁽¹⁾

Esercizio_1-Considerata la successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il cui termine generale è

$a_n = \sqrt{n^2 + 17n} - n$, studiarne il limite per $n \rightarrow +\infty$ e, applicando la teoria conosciuta, stabilire se è limitata.

Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 17n} - n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 17n} - n)(\sqrt{n^2 + 17n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 17n} + n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 17n})^2 - n^2}{(\sqrt{n^2 + 17n} + n)} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 17n - n^2}{(\sqrt{n^2 + 17n} + n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{17n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{17}{n}} + 1 \right)} = \frac{17}{\left(\sqrt{1 + \frac{17}{+\infty}} + 1 \right)} = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

Poiché la successione è convergente, richiamando il teorema in virtù del quale “ogni successione convergente è limitata”, si conclude che la successione in esame è limitata.

* * * * *

Esercizio_2 Considerata la successione reale di termine generale $a_n = e \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)$, con $n \in \mathbb{N}_0$,

risolvere i quesiti seguenti:

Q₁- Dimostrare che la successione è strettamente monotona, precisando il tipo di monotonia.

Q₂- Studiare il limite per $n \rightarrow +\infty$

Q₃- Sfruttando le conclusioni ottenute nei due precedenti quesiti determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della successione.

Soluzione

Q₁- Dimostriamo che la successione è **strettamente crescente**, quindi che $\forall n \in \mathbb{N}_0$ risulta

$$a_n < a_{n+1}.$$

Osserviamo che la disuguaglianza da provare si elabora come segue

$$e \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) < e \left(e^{-\frac{1}{n+1}} - 1 \right) \rightarrow e^{-\frac{1}{n}} - 1 < e^{-\frac{1}{n+1}} - 1 \rightarrow e^{-\frac{1}{n}} < e^{-\frac{1}{n+1}} \rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

e l'ultima disuguaglianza, con $n \in \mathbb{N}_0$, è evidentemente vera.

Q₂- Studio del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) = e(e^0 - 1) = e(1 - 1) = 0$$

Q₃- La successione, essendo strettamente crescente ammette il valore del limite trovato come estremo superiore; questo valore non è però massimo del codominio. Invece, il minimo della successione è il primo termine:

$$\min = a_1 = e(e^{-1} - 1)$$

⁽¹⁾ Esercizi assegnati nel compito in classe: M2_5D-17-11-11