Verifica della definizione di limite

Verificare in base alla definizione di limite che sussiste il seguente limite

$$\lim_{x\to 3}\left(-x^2+6x-9\right)=0^-$$

Elaborazioni

Si tratta di verificare che per una funzione reale di variabile f:A→R, y=f(x), il limite in un punto di accumulazione per il dominio è finito, precisamente, con la funzione che è un polinomio, il cui dominio è R, si deve provare che sussiste la seguente proposizione:

$$\forall I^-(0),\exists \mathrm{J}(3): x\in\left(\mathrm{J}(3)-\{3\}\right)\cap R \Rightarrow f(x)\in I^-(0), \qquad (1)$$

il cui significato è

<< comunque si fissa un intorno sinistro del punto reale 0, indicato con $I^-(0)$, esiste un intorno completo del punto reale x_0=3, indicato da J(3), per ogni x del quale diverso da 3 e appartenente al dominio di definizione della funzione, il valore f(x) della funzione appartiene all'intorno sinistro di 0 >>.

La precedente proposizione può essere esplicitata diversamente e resa più operativa introducendo i parametri reali positivi ε, δ come segue:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0: \forall x\in]3-\delta_\varepsilon;3+\delta_\varepsilon[\cap R, \wedge x\neq 3\Rightarrow f(x)\in\left]-\varepsilon;0\right[\qquad (1)'$$

Osserviamo che

a) il parametro reale positivo δ>0 che si deve determinare, dipende dal valore ε>0 fissato a piacere;
b) nell'individuazione dell'intorno del punto x_0=3 si punta a determinare un intorno circolare del punto. Questa caratteristica non è strettamente necessario che sia soddisfatta, importante è che si riesca a trovare un intorno completo del punto 3 in cui valga la condizione $f(x)\in\left]-\varepsilon;0\right[$.

Operiamo.

Con ε>0, la condizione che si deve verificare $f(x)\in\left]-\varepsilon;0\right[$ si traduce nella seguente doppia disuguaglianza $-\varepsilon<-x^2+6x-9<0$, quindi si deve risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases}-x^2+6x-9>-\varepsilon\\-x^2+6x-9<0\end{cases}\to\begin{cases}-\left(x^2-6x+9\right)>-\varepsilon\\-\left(x^2-6x+9\right)<0\end{cases}\to\begin{cases}(x-3)^2<\varepsilon\\(x-3)^2>0\end{cases}.$$

La prima disequazione del sistema è equivalente alla seguente doppia condizione $-\sqrt{\varepsilon}<x-3<\sqrt{\varepsilon}$, quindi i valori reali di x che la soddisfano sono quelli dell'intervallo $3-\sqrt{\varepsilon}<x<+3+\sqrt{\varepsilon}$.

La seconda disequazione è evidentemente soddisfatta da ogni $x\neq$3.

Il sistema di disequazioni è dunque soddisfatto nell'insieme aperto : $J=\left]3-\sqrt{\varepsilon};3+\sqrt{\varepsilon}\right[-\{3\}$

Ponendo $\delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$, si può formalmente scrivere che il sistema di disequazioni affrontato è soddisfatto nell'insieme $J_\varepsilon=\left]3-\delta_\varepsilon;3+\delta_\varepsilon\right[-\{3\}$, che verifica la definizione del limite, perciò riteniamo acquisita la verifica della definizione di limite affrontata.

Si noti, infine, che l'intorno J(3) che era da determinare in virtù della definizione di limite è $J=\left]3-\sqrt{\varepsilon};3+\sqrt{\varepsilon}\right[$, che è un particolare intorno circolare di raggio $\sqrt{\varepsilon}$ del punto x_0 = 3.