Esercitazione sulla verifica della definizione di limite

Dopo aver determinato il dominio di definizione delle singole funzioni, applicando la definizione di limite, verificare che sussistono i seguenti limiti.

1. $\lim_{x\to 1}(3-2x)=1$ — ∀ε>0, $I_\varepsilon(1)=\left]1-\frac{\varepsilon}{2};1+\frac{\varepsilon}{2}\right[$
2. $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-3x}=2$ — $I_\varepsilon(-1)=\left]-1-\frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{3};-1+\frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{3}\right[$
3. $\lim_{x\to 3}\ln(4-x)=0$ — ∀ε>0, $I_\varepsilon(3)=\left]4-e^{\varepsilon};4-e^{-\varepsilon}\right[$
4. $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty$ — ∀M>0, $I_M^-(2)=\left]2-\frac{1}{M};2\right[$
5. $\lim_{x\to 1}(2-3x)=-1$ — ∀ε>0, $I_\varepsilon(1)=\left]1-\frac{\varepsilon}{3};1+\frac{\varepsilon}{3}\right[$
6. $\lim_{x\to 8}\sqrt{x+1}=3$ — Con $0<\varepsilon\le 3$, $I_\varepsilon(8)=\left]8-6\varepsilon+\varepsilon^2;8+6\varepsilon+\varepsilon^2\right[$
7. $\lim_{x\to 4}\ln(x-3)=0$ — ∀ε>0, $I_\varepsilon(4)=\left]3+e^{-\varepsilon};3+e^{\varepsilon}\right[$

Elaborazioni

1. $\lim_{x\to 1}(3-2x)=1$ La funzione è definita in tutto R, quindi $f:R\to R$. Si deve verificare che sussiste la seguente proposizione:

$$\left(\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x)=l\in R\\ x_0=1\in R\end{array}\right)\Leftrightarrow\ \left(\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:|x-1|<\delta_\varepsilon\wedge(x\neq 1\wedge x\in R)\Rightarrow|(3-2x)-1|<\varepsilon\right).$$

La disuguaglianza $|(3-2x)-1|<\varepsilon$ è equivalente alla seguente doppia disuguaglianza $1-\varepsilon<3-2x<1+\varepsilon$ e quindi al sistema di disequazioni $\begin{cases}1-\varepsilon<3-2x\\3-2x<1+\varepsilon\end{cases}$, che elaborato diventa $\begin{cases}x<1+\frac{\varepsilon}{2}\\x>1-\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$.

Il sistema è soddisfatto nell'intervallo $\left]1-\frac{\varepsilon}{2};1+\frac{\varepsilon}{2}\right[$, che evidentemente è un intorno completo (circolare di raggio ε/2) del punto $x_0=1$. Ai fini del soddisfacimento dell'esplicitazione formale della definizione di limite scritta facciamo notare che la stessa con ε>0 è soddisfatta allorché si sceglie $\delta_\varepsilon=\varepsilon/2$ perché l'intervallo]-1-δ_ε;-1+δ_ε[risulta essere un intorno completo (circolare) del punto $x_0=1$, come deve essere. La definizione di limite è acquisita.

2. $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-3x}=2$ La funzione in oggetto è definita per i valori della variabile reale che verificano la C.d.E. $1-3x\ge 0$, perciò deve risultare $x\le\frac{1}{3}$. La funzione è definita nell'intervallo $A=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$ e il punto $x_0=-1$ è un punto interno allo stesso. Si deve verificare che sussiste la seguente proposizione:

$$\left(\lim_{x\to -1}\sqrt{1-3x}=2\in R\right)\Leftrightarrow\ \left(\forall\varepsilon>0,\exists I_\varepsilon(-1):x\in\left(I_\varepsilon(-1)-\{-1\}\right)\cap\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\Rightarrow\left|\sqrt{1-3x}-2\right|<\varepsilon\right)$$

La disuguaglianza da studiare è equivalente alla doppia disuguaglianza $2-\varepsilon<\sqrt{1-3x}<2+\varepsilon$ che conduce al sistema di disequazioni $\begin{cases}\sqrt{1-3x}>2-\varepsilon\\ \sqrt{1-3x}<2+\varepsilon\end{cases}$.

Se $0<\varepsilon\le 2$ il sistema di disequazioni si trasforma come segue:

$$\begin{cases}1-3x>(2-\varepsilon)^2\\ 1-3x<(2+\varepsilon)^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3x<1-(2-\varepsilon)^2\\ 3x>1-(2+\varepsilon)^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3x<1-4+4\varepsilon-\varepsilon^2\\ 3x>1-4-4\varepsilon-\varepsilon^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<-1+\dfrac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{3}\\ x>-1-\dfrac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{3}\end{cases}.$$

Si riconosce che l'intervallo delle soluzioni del sistema $-1-\frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{3}<x<-1+\frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{3}$, con la condizione $0<\varepsilon\le 2$, definisce un intorno completo del punto $x_0=-1$, $I_\varepsilon(-1)=\left]-1-\frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{3};-1+\frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{3}\right[$ completamente incluso nel dominio A di definizione della funzione, perciò è verificata la definizione di limite.

Se ε>2 allora la disequazione $\sqrt{1-3x}>2-\varepsilon$ è verificata per ogni x∈A perché 2-ε<0, mentre la seconda disequazione è comunque soddisfatta per i valori $x>-1-\frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{3}$, quindi si può assumere come intorno del punto $x_0=-1$ l'intervallo $I_\varepsilon(-1)=\left]-1-\frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{3};\frac{1}{3}\right[$ che è un intorno completo del punto in cui è soddisfatta la definizione di limite.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\ln(4-x)=0$ La funzione in oggetto è definita per i valori della variabile che verificano la C.d.E. 4-x>0, quindi il dominio di definizione è A=]-∞;4[.
Per la sussistenza del limite deve essere soddisfatta la seguente proposizione
$\left(\forall\varepsilon>0,\exists I_\varepsilon(3):x\in\left(I_\varepsilon(3)-\{3\}\right)\cap\left]-\infty;4\right[\Rightarrow\left|\ln(4-x)-0\right|<\varepsilon\right)$.
La disuguaglianza da studiare è equivalente alla seguente doppia disuguaglianza $-\varepsilon<\ln(4-x)<\varepsilon$ che scriviamo nella forma di sistema
$\begin{cases}\ln(4-x)>-\varepsilon\\ \ln(4-x)<\varepsilon\end{cases}\rightarrow\begin{cases}4-x>e^{-\varepsilon}\\ 0<4-x<e^{\varepsilon}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<4-e^{-\varepsilon}\\ 4-e^{\varepsilon}<x<4\end{cases}$;
l'insieme delle soluzioni del sistema è l'intervallo $I_\varepsilon=\left]4-e^{\varepsilon};4-e^{-\varepsilon}\right[$ che è un intorno completo del punto $x_0=3$ incluso nel dominio di definizione.
La verifica della definizione di limite è acquisita.

4. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty$ La funzione è razionale fratta ed è definita nel dominio A=R-{2}. Per la sussistenza del limite in oggetto deve essere verificata la seguente proposizione:
$\left(\forall M>0,\exists\delta_M>0:2-\delta_M<x<2\wedge x\in A\Rightarrow\frac{1}{2-x}>M\right)$.
Limitiamo l'attenzione ai valori x <2; per detti valori risulta 2-x>0. Osserviamo che la disuguaglianza $\frac{1}{2-x}>M$ è equivalente alla seguente $2-x<\frac{1}{M}$,che può essere scritta nella forma $x>2-\frac{1}{M}$, pertanto l'intorno sinistro $I_M^-(2)=\left]2-\frac{1}{M};2\right[$ è quello che

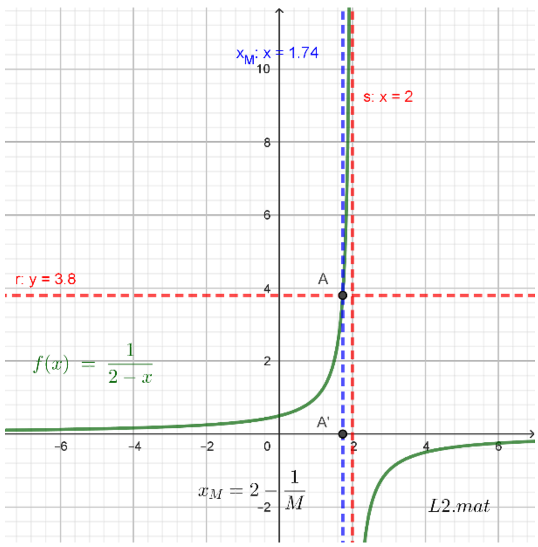

Figura 1- Il limite laterale sinistro nel punto $x_0=2$ è $+\infty$.

permette di affermare che sussiste la definizione di limite laterale sinistro che vale $+\infty$ nel punto $x_0 = 2$. $\delta_M = \frac{1}{M}$.

N.B.

Gli esercizi n.5, 6, 7 sono lasciati come attività di rinforzo per il lettore interessato.