Analisi Matematica

Esercitazione di riepilogo sullo studio di limiti

(con applicazione di alcuni limiti notevoli)

Studiare i limiti

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{\sqrt{1+x}-1}$ R:8 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{sen(3x)}$ R: $\frac{1}{6}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)}{\tan(6x)\cdot x}$ R: $\frac{1}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2sen^2(x)+sen(x)-3}{\cos(x)}$ R:0 5) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{[sen(3x)+2sen(x)](x-\pi)}{1+\cos(x)}$ R:-10

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{2x}$ R: $e^{\frac{3}{2}}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{6x}}$ R: $e^{\frac{2}{3}}$ 8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x\sqrt{x^2-1}}{1-2x^2}$ R: $\frac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln(1+e^x)-x\right]$ R:0 10) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(x^2+3x+3)}{x^2-1}$ R: $-\frac{1}{2}$

Elaborazioni

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{\sqrt{1+x}-1}$

Ricordati i **limiti notevoli** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}=\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{4x}\cdot\frac{4x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{4x}\cdot 4\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}}=1\cdot 4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=4\cdot 2=8$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{sen(3x)}$

Osserviamo che per l'esistenza della funzione $\sqrt{x}$ ha senso studiare solo il limite per $x\to 0^+$. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Ricordato il **limite notevole** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}=\frac{1}{2}$ possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{sen(3x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{(\sqrt{x})^2}{\frac{sen(3x)}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{sen(3x)}{3x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)}{\tan(6x)\cdot x}$

Il limite si presenta nella forma 0/0. Ricordati il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ed il **limite notevole** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan(t)}{t}=1$, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)}{\tan(6x)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(x)]\cdot[1+\cos(x)+\cos^2(x)]}{\frac{\tan(6x)}{6x}\cdot 6x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(6x)}{6x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)+\cos^2(x)}{6}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1+1+1}{6}=\frac{1}{4}$$

4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2sen^2(x)+sen(x)-3}{\cos(x)}$$

Il limite si presenta nella forma 0/0. Ricordiamo che il trinomio di secondo grado ax^2+bx+c si può scomporre in fattori nella forma $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, dove x_1, x_2 sono le radici dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$. Ciò premesso procediamo come segue.
Posto *sen*(x)=t risolviamo l'equazione di secondo grado $2t^2+t-3=0$, che ammette come radici $t_1=-\frac{3}{2}$, $t_2=2$. Possiamo scrivere il limite in esame nella seguente forma:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot[sen(x)-1]\cdot\left[sen(x)+\frac{3}{2}\right]}{\cos(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[sen(x)-1]\cdot[2sen(x)+3]}{\cos(x)}$$

Ovviamente il limite è ancora della forma 0/0. Procediamo moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per il 1+*sen*(x) ed elaboriamo la frazione. Segue:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[sen(x)-1]\cdot[sen(x)+1]}{\cos(x)}\cdot\frac{[2sen(x)+3]}{sen(x)+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-[1-sen^2(x)]}{\cos(x)}\cdot\frac{[2sen(x)+3]}{sen(x)+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-cos^2(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{[2sen(x)+3]}{sen(x)+1}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[-cos(x)]\cdot\frac{[2sen(x)+3]}{sen(x)+1}=0\cdot\frac{2\cdot 1+3}{1+1}=0\cdot\frac{5}{2}=0$$

5. $$\lim_{x\to\pi}\frac{[sen(3x)+2sen(x)](x-\pi)}{1+\cos(x)}$$

Il limite si presenta della forma 0/0. Introduciamo un **cambio di variabile** ponendo $x-\pi=t$. Con $x\to\pi$ si deduce che $t\to0$, perciò per il limite in esame si ha:

$$\lim_{t\to 0}\frac{[sen(3(\pi+t))+2sen(\pi+t)]\cdot t}{1+\cos(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{[sen(3\pi+3t)-2sen(t)]\cdot t}{1-\cos(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{[sen(2\pi+\pi+3t)-2sen(t)]\cdot t}{1-\cos(t)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{[sen(\pi+3t)-2sen(t)]\cdot t}{1-\cos(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{[-sen(3t)-2sen(t)]\cdot t}{1-\cos(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left[-3\cdot\frac{sen(3t)}{3t}-2\cdot\frac{sen(t)}{t}\right]\cdot \cancel{t^2}}{\frac{1-\cos(t)}{t^2}\cdot\cancel{t^2}}=\frac{-3\cdot 1-2\cdot 1}{\frac{1}{2}}=-10$$

6. $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{x}\right)^x\right]^2=e^{\frac{3}{4}\cdot 2}=e^{\frac{3}{2}}$$ Si ricordi il **limite notevole** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$.

7. $$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{6x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{6}}=e^{\frac{4}{6}}=e^{\frac{2}{3}}$$ Si ricordi il **limite notevole** $\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^\alpha$

8. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x^2-1}}{1-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}-2}=\frac{1}{2}$$

9. $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^x\right)-x\right]=\ln\left(1+e^{+\infty}\right)-(+\infty)=+\infty-\infty$ **La forma è indeterminata**. Elaboriamo l'espressione della funzione al fine di ricondurla ad una forma il cui limite sia calcolabile. Utilizzeremo una scomposizione in fattori e la proprietà del prodotto della funzione logaritmica. Possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^x\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\right)+\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln(e)+\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)-x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\cancel{x}\cdot 1+\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)-\cancel{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)=\ln\left(\frac{1}{+\infty}+1\right)=\ln\left(0^++1\right)=\ln\left(1^+\right)=0^+$$

Il limite in esame vale zero (0).

Approfondimento

Forniamo una rappresentazione grafica della funzione $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)-x$ in modo da consentire al lettore di osservare come variano i valori della stessa.

È opportuno far notare che la funzione in oggetto esiste per ogni *x* reale e assume valori positivi in tutto il dominio di definizione perché la disequazione $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)-x>0$, equivalente alla seguente $\ln\left(1+e^x\right)>x$, a sua volta equivalente alla disequazione $1+e^x>e^x$, è soddisfatta in tutto R.

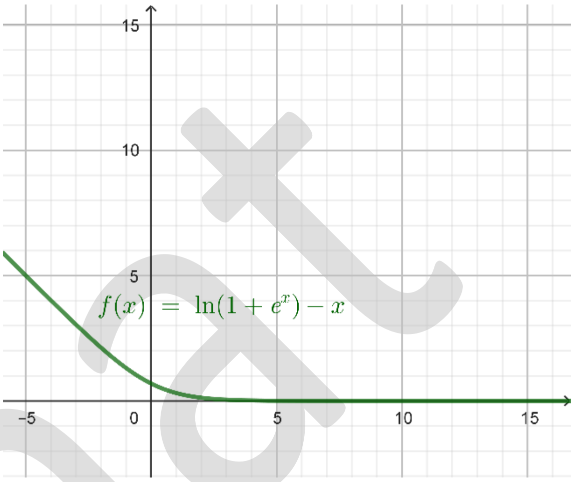

Figura 1

Il diagramma parziale della funzione è riportato in Figura 1.

Nella tabella che segue sono riportati i valori della funzione relativamente all'intervallo [0;30], avendo scelto i punti che si ottengono dal punto iniziale *x*=0 procedendo con l'incremento $\Delta x=2$.

Si osservi come i valori della funzione decrescano abbastanza velocemente: f(0)≈0,69, f(10)≈4,54·10^{-5}, f(20)≈2,06·10^{-9}, f(30)≈9,24·10^{-14}, con i rapporti

$$\frac{f(10)}{f(0)}\approx 6{,}54\cdot10^{-5},\ \frac{f(20)}{f(10)}\approx 4{,}54\cdot10^{-5},\ \frac{f(30)}{f(20)}\approx 4{,}48\cdot10^{-5}$$

Nell'intervallo osservato il fattore di decrescita per ogni 10 unità è circa 10^5=100000, vale a dire che f(10)≈f(0)/100000, f(20)≈f(10)/100000, f(30)≈f(20)/100000.

x	ln(1+exp(*x*))-*x*
0	0,693147181
2	0,126928011
4	0,018149928
6	0,002475685
8	0,000335406
10	4,53989E-05
12	6,14419E-06
14	8,31528E-07
16	1,12535E-07
18	1,523E-08
20	2,06115E-09
22	2,78948E-10
24	3,77511E-11
26	5,1088E-12
28	6,92779E-13
30	9,23706E-14

10. $\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(x^2+3x+3\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(1+\left(x^2+3x+2\right)\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(1+(x+1)(x+2)\right)}{(x-1)(x+1)}=$

$\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(1+(x+1)(x+2)\right)}{(x+1)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)}{(x-1)}$. Con $\varphi(x)=(x+1)(x+2)$, si ha $\lim_{x\to-1}\varphi(x)=0$

e sussiste il limite notevole $\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(1+\varphi(x)\right)}{\varphi(x)}=1$, quindi, possiamo scrivere anche

$$\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(1+(x+1)(x+2)\right)}{(x+1)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)}{(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{\ln\left(1+\varphi(x)\right)}{\varphi(x)}\cdot\lim_{x\to-1}\frac{(x+2)}{(x-1)}=1\cdot\frac{-1+2}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$