Limiti in forma indeterminata con funzioni goniometriche

Con l'utilizzo dei limiti notevoli

Studiare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tan(5x)}{x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^3}$ R:5; $\nexists$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)+3tan(4x)}{6x}$ 4) $\lim_{x\to 1}\frac{sen(x^2-1)}{x-1}$ R: $\frac{7}{3}$;2

5) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)-senx}{x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)-2senx}{x^3}$ R:1;-1

7) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)-sen(2x)}{5x+tan(2x)}$ 8) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{sen(2x)-1}{cos(x)-sen(x)}$ R: $\frac{3}{7}$;0

Elaborazioni

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tan(5x)}{x}=\frac{0}{0}$; procediamo riconducendoci ad un limite notevole.

$$\lim_{x\to 0}5\cdot\frac{tan(5x)}{5x}=5\cdot\lim_{y\to 0}\frac{tan(y)}{y}=5\cdot 1=5$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^3}=\frac{0}{0}$; elaboriamo il limite come segue $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(x)}{x}\right]^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

Studiando i due limiti laterali si ha: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=1\cdot(+\infty)=+\infty$; $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=1\cdot(-\infty)=-\infty$.

Poiché i due limiti laterali hanno valori diversi si conclude che il limite in esame non esiste. La funzione ha nel punto x=0 una discontinuità di seconda specie.

3) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)+3\tan(4x)}{6x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(2x)}{6x}+\frac{\cancel{3}tan(4x)}{\cancel{6}_2 x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{3\cdot 2x}+\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{tan(4x)}{4x}=$

$\frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{sen(y)}{y}+2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{tan(t)}{t}=\frac{1}{3}\cdot 1+2\cdot 1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{sen(x^2-1)}{x-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\frac{sen(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{sen(x^2-1)}{(x^2-1)}=2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{sen(y)}{y}=2\cdot 1=2$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)-senx}{x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{2sen(x)\cos(x)-senx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)\left[2\cos(x)-1\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left[2\cos(x)-1\right]=$

$1\cdot(2-1)=1$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)-2senx}{x^3}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{2sen(x)\cos(x)-2senx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}(-1)\left[\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right]=2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=-1$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(5x)-sen(2x)}{5x+tan(2x)}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{sen(5x)}{5x}-2\cdot\frac{sen(2x)}{2x}}{\frac{5x}{x}+2\cdot\frac{tan(2x)}{2x}}=\frac{5\cdot 1-2\cdot 1}{5+2\cdot 1}=\frac{3}{7}$

8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen(2x)-1}{cos(x)-sen(x)}=\frac{0}{0}$ →Poniamo $x-\frac{\pi}{4}=t\to x=\frac{\pi}{4}+t$, quindi $t\to 0$.

Osserviamo che risulta: $sen(2x)=sen\left(2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=cos(2t)$;

$$cos(x)=cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(t)-sen\left(\frac{\pi}{4}\right)sen(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[cos(t)-sen(t)\right];$$

$$sen(x)=sen\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(t)+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)sen(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[cos(t)+sen(t)\right],$$

quindi la funzione argomento del limite assume la seguente forma

$$\frac{sen(2x)-1}{cos(x)-sen(x)}=\frac{cos(2t)-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[cos(t)-sen(t)\right]-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[cos(t)+sen(t)\right]}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{cos(2t)-1}{-2sen(t)}=\frac{1-cos(2t)}{\sqrt{2}\cdot sen(t)}$$

ed il limite da studiare nella nuova variabile è

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-cos(2t)}{\sqrt{2}\cdot sen(t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-cos(2t)}{sen(t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-cos(2t)}{2t}\cdot 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{sen(t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0\cdot 2\cdot 1=0$$