Studiare i limiti proposti

Limiti delle forme indeterminate 0/0, ∞-∞

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}$ R: $\frac{1}{4}$

2) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}$ R:1

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-\sqrt{2x}}$ R:-2

4) $\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2+x-a}{5x^2-7ax+2a^2}$ R: $\frac{a^2+1}{3a}$

5) $\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2}{x^2-a^2}$ R: $\frac{a}{2}$

6) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$ R:+∞

7) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$ R: 0^+

8) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$ R: $\frac{3}{4}$

9) $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}+x\right)$ R: $+\infty$

10) $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)$ R: 0^+

Elaborazioni

Es1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}$

Per lo studio del limite si scompongono in fattori numeratore e denominatore al fine di far comparire il fattore infinitesimo (x-1).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+3}=\frac{1}{4}$$

Es2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x+4)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x+4}=\frac{3}{3}=1$

Es3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-\sqrt{2x}}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)(x+\sqrt{2x})}{(x-\sqrt{2x})(x+\sqrt{2x})}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)(x+\sqrt{2x})}{x\cancel{(x-2)}}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+\sqrt{2x})}{x}=\frac{-1\cdot 4}{2}=-2$$

Es4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-ax^2+x-a}{5x^2-7ax+2a^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+1)}{(x-a)(5x-2a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+1}{5x-2a}=\frac{a^2+1}{3a}$

Es5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-ax^2}{x^2-a^2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x+a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2}{x+a}=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$

ES6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)=+\infty-\infty\to$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)=+\infty\left(\sqrt{2}-1\right)=+\infty$$

Es7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=+\infty-\infty$ Per risolvere questo limite si deve trasformare la funzione moltiplicando e dividendo per il fattore $\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

Es8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=+\infty-\infty$

Anche per questo limite per superare la forma indeterminata è necessario moltiplicare e dividere per il fattore $\left(\sqrt{4x^2+3x}+2x\right)$ l'espressione della funzione.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

Es9) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}+x\right)=+\infty-\infty\to\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(-\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}+1\right)\right)=-\infty\left(-\sqrt{3}+1\right)=+\infty$$

Es10) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)=+\infty-\infty$

Per risolvere la forma indeterminata è necessario moltiplicare e dividere per il fattore $\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}=\frac{5}{+\infty}=0^+$$