Studio di limiti della forma 0/0

per funzioni algebriche

1. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{x(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{4}$

2. $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+2x+1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{0^+}=-1\cdot(+\infty)=-\infty$

3. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x\sqrt{x-2}}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{x\sqrt{x-2}\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{x\sqrt{x-2}\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2}}{x\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{0}{2\cdot6}=0$

4. $\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}\cdot\frac{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x\sqrt{x^2+1}\right)^2-2}{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}\right)}=$

$\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^2-2}{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}\right)}=^{(1)}\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^3+x^2+2x+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cdot\left(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+2x+2}{(x+1)\cdot\left(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}\right)}=$

$\frac{6}{2\cdot2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

5. $\lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt{4x+5}}{\sqrt{2x-1}-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt{4x+5}}{\sqrt{2x-1}-1}\cdot\frac{3+\sqrt{4x+5}}{3+\sqrt{4x+5}}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}=\lim_{x\to1}\frac{3^2-\left(\sqrt{4x+5}\right)^2}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}+1}{3+\sqrt{4x+5}}=$

$\lim_{x\to1}\frac{9-4x-5}{2x-1-1}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to1}\frac{-4\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}}=-\frac{2}{3}$

6. $\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{2-\sqrt{x+3}}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{2-\sqrt{x+3}}\cdot\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2}=$

$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+5)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{-\cancel{(x-1)}}=-24$

7. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4x}-2x^2}{x-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x}-2x^2}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{2\cancel{\sqrt{x}}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}=2\cdot\lim_{x\to1}\frac{\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=$

$2\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1-x^2-x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=2\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}(1-x)+(1-x)(1+x)}{x-1}=2\cdot\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(1-x)}\left(\sqrt{x}+1+x\right)}{-\cancel{(1-x)}}=2\cdot(-3)=-6$

---

(1) Si scompone il polinomio al numeratore eseguendo la divisione dello stesso per (x -1) ottenendo come quoziente Q(x)= x^3+x^2+2x+2

8. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{4x-1}-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{4x-1}-1}\cdot\frac{\sqrt{4x-1}+1}{\sqrt{4x-1}+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)\left(\sqrt{4x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{4x-1}\right)^2-1}=$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\sqrt{4x-1}+1\right)\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)}{4x-1-1}=2\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)}{2(2x-1)}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

9. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{4x-1}-2x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{4x-1}-2x}\cdot\frac{\sqrt{4x-1}+2x}{\sqrt{4x-1}+2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)\left(\sqrt{4x-1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x-1}\right)^2-(2x)^2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\sqrt{4x-1}+2x\right)\cdot$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{-(2x-1)^2}=2\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{1-2x}=2\cdot\frac{1}{0}$

A questo punto è necessario studiare il segno del denominatore (1-2x) in un intorno del punto x=1/2. Osserviamo che la funzione di partenza ha come dominio di definizione l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni $(4x-1\geq 0)\wedge\left(\sqrt{4x-1}-2x\neq 0\right)$ che è $S=\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$,

dunque il punto x=1/2 per il dominio è di accumulazione sia a destra che a sinistra. Risulta:

$$2\cdot\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{1}{1-2x}=2\cdot\frac{1}{0^+}=2\cdot(+\infty)=+\infty\,;$$

$$2\cdot\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\frac{1}{1-2x}=2\cdot\frac{1}{0^-}=2\cdot(-\infty)=-\infty$$

Poiché i due limiti laterali esistono e sono diversi tra loro si conclude che il limite della funzione in esame non esiste. In Figura 1 è riportato parzialmente il diagramma della funzione; sono altresì evidenziati il punto del grafico A(0.25;f(0.25))=(0.25;1) e la retta asintoto verticale t: x=0.5.

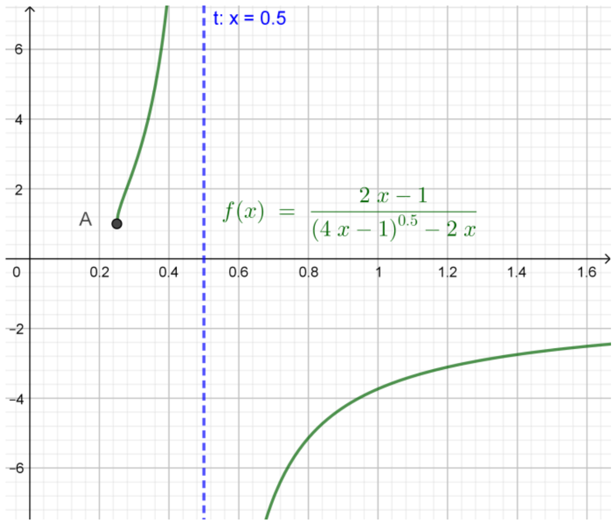

Figura 1- Si osservi che per una rappresentazione adeguata del grafico sono state adottate per i due assi cartesiani unità di misura diverse; precisamente il rapporto di scala è 1:10.

10. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x+1}\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt{x+1}\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-\cancel{x}}=-2$

11. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x\sqrt{x+2}-4}{\sqrt{x+3}-1}=\frac{0}{0}$

Osservazione

Per lo studio del limite operiamo con la sostituzione di variabile ponendo $x+2=t$. Evidentemente $x\to$-2 implica che sarà $t\to$0. Prima di continuare facciamo presente che il punto x=-2 per il dominio di definizione della funzione argomento del limite è solo di accumulazione a destra giacché deve essere soddisfatta la condizione x+2≥0 [2], quindi sarà $t\to 0^+$.

[2] Le condizioni di esistenza per la funzione sono tre: $(x+2\geq 0)\wedge(x+3\geq 0)\wedge\left(\sqrt{x+3}-1\neq 0\right)$, che elaborate forniscono come dominio di definizione della funzione $x>-2$.

Procediamo con lo studio del limite.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{(t-2)^2-(t-2)\sqrt{t}-4}{\sqrt{t+1}-1}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-4t+\cancel{4}-(t-2)\sqrt{t}-\cancel{4}}{\sqrt{t+1}-1}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-4t-(t-2)\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-1}=\frac{0}{0}$$

A questo effettuiamo un'ulteriore sostituzione di variabile ponendo $\sqrt{t}=u \to t=u^2$ e sarà $u\to 0^+$.

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{u^4-4u^2-(u^2-2)\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2+1}-1}=\lim_{u\to 0^+}\frac{u^4-4u^2-(u^2-2)u}{\sqrt{u^2+1}-1}=\lim_{u\to 0^+}\frac{u(u^3-4u-u^2+2)}{\sqrt{u^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{u^2+1}+1}{\sqrt{u^2+1}+1}=$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\cancel{u}(u^3-4u-u^2+2)}{u^{\cancel{2}}}\cdot\left(\sqrt{u^2+1}+1\right)=\lim_{u\to 0^+}\frac{(u^3-4u-u^2+2)}{u}\cdot\left(\sqrt{u^2+1}+1\right)=\frac{2}{0^+}\cdot 2=+\infty$$

12. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x}{\sqrt{x+2}+x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to -1}\frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x+2}+x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x+2}-x}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+2}-x\right)}{x+2-x^2}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x+2}-x\right)}{-\cancel{(x+1)}(x-2)}=\frac{-1(-2)(1+1)}{-(-1-2)}=\frac{4}{3}$$