Esercizi sulla verifica della definizione di limite infinito

1) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{2}{x}}=+\infty$ La funzione oggetto di limite ha come dominio di definizione l'intervallo A=]0;+∞[.
Per la definizione di limite deve essere soddisfatta la segue te proposizione

$\forall M>0,\exists I_M^+(0): x\in I_M^+(0)\cap A \Rightarrow f(x)>M$

Ebbene, con M>0, si ha $\sqrt{\frac{2}{x}}>M$, equivalente alla seguente $\frac{2}{x}>M^2$, soddisfatta per ogni $0<x<\frac{2}{M^2}$. L'intervallo $\left]0;\frac{2}{M^2}\right[$ è un intorno destro del punto x=0, dipendente dal M, interamente incluso nel dominio di definizione della funzione, dunque la proposizione indicata sopra è soddisfatta. C.V.D.

2) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ La funzione in oggetto è definita per ogni x reale diverso da 2 : A=R-{2}. Il limite sussiste se risulta soddisfatta la seguente proposizione

$\forall M>0,\exists I_M(2): x\in I_M(2)\cap A \Rightarrow f(x)>M$, essendo $I_M(2)$ un intorno completo del punto x_0=2 dipendente da M.

Studiamo la disequazione $f(x)>M \to \frac{1}{(x-2)^2}>M$, equivalente alla seguente $(x-2)^2<\frac{1}{M}$, $\forall x\in$A, che a sua volta è equivalente alla doppia disuguaglianza $-\frac{1}{\sqrt{M}}<x-2<\frac{1}{\sqrt{M}}$, da cui $2-\frac{1}{\sqrt{M}}<x<2+\frac{1}{\sqrt{M}}$. L'intervallo $I_M=\left]2-\frac{1}{\sqrt{M}};2+\frac{1}{\sqrt{M}}\right[$ è un intorno completo del punto x_0=2 in ciascun punto del quale diverso da 2 è soddisfatta la disuguaglianza richiesta dalla definizione del limite. C.V.D.

3) $\lim_{x\to -3}2^{\frac{1}{|x+3|}}=+\infty$ La funzione oggetto di limite è definita per ogni x reale diverso da -3, dunque il dominio è A=R-{-3}. Per la sussistenza del limite deve risultare vera la seguente proposizione:

$\forall M>0,\exists I_M(-3): x\in I_M(-3)\cap A \Rightarrow f(x)>M$

essendo $I_M(-3)$ un opportuno intorno completo del punto x_0=-3 dipendente da M. Studiamo la disequazione $f(x)>M \to 2^{\frac{1}{|x+3|}}>M$.

Ricordato che la funzione esponenziale avente base maggiore di uno è strettamente crescente in tutto R e assume valori maggiori di uno quando il suo esponente è positivo, poiché per x≠-3 risulta $\frac{1}{|x+3|}>0$, deduciamo che se si sceglie 0<M≤1 la disuguaglianza $2^{\frac{1}{|x+3|}}>M$ è soddisfatta per ogni x≠-3, quindi si può scegliere come intorno completo del punto x_0=-3 un intervallo del tipo

$\left]-3-\delta;-3+\delta\right[$, con δ qualsiasi numero positivo, e detto intervallo permette di asserire che è soddisfatta la definizione di limite.

Se si sceglie M>1 la disuguaglianza $2^{\frac{1}{|x+3|}} > M$ si trasforma nell'equivalente $\frac{1}{|x+3|} > \log_2(M)$,

che, essendo $\log_2(M) > 0$, si può porre nella forma equivalente $|x+3| < \frac{1}{\log_2(M)}$, ∀x≠-3;

quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta dai valori reali $-3-\frac{1}{\log_2(M)} < x < -3+\frac{1}{\log_2(M)}$ e questi punti costituiscono un intorno completo del punto x_0≠-3. Quindi anche con M>1 è stato trovato un opportuno intorno completo del punto x_0=-3 in cui è soddisfatta la definizione di limite. C.V.D.

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(|x|+1)} = +\infty$ La funzione è definita per ogni x≠0→A=R_0 . Osserviamo che in ogni punto del dominio l'argomento del logaritmo (naturale) è maggiore di uno, quindi il valore del denominatore della frazione è positivo. Per x→0 il denominatore tende a 0^+. Per provare la correttezza del limite si deve dimostrare che sussiste la seguente proposizione:

$\forall M>0,\ \exists I_M(0): x\in I_M(0)\cap A \Rightarrow f(x)>M$, essendo $I_M(0)$ un intorno completo del punto x=0.

Sia dunque M>o. Risolviamo la disequazione

$\frac{1}{\ln(|x|+1)} > M$, che con x≠0 diventa $\ln(|x|+1) < \frac{1}{M}$, da cui $0 < |x|+1 < e^{\frac{1}{M}} \to -1 < |x| < e^{\frac{1}{M}}-1$

Evidentemente $-1<|x|$ è vera ∀x∈R e poiché con M>0 si ha $e^{\frac{1}{M}} > 1$, quindi $e^{\frac{1}{M}}-1>0$, la disuguaglianza $|x| < e^{\frac{1}{M}}-1$ è soddisfatta per ogni x reale tale che $-\left(e^{\frac{1}{M}}-1\right) < x < \left(e^{\frac{1}{M}}-1\right)$.

L'intervallo $\left]-e^{\frac{1}{M}}+1; e^{\frac{1}{M}}-1\right[$ è un intorno completo del punto x=0 dipendente da M e in esso è soddisfatta la disuguaglianza richiesta dalla definizione di limite. Si conclude che è soddisfatta la proposizione esplicitata sopra. C.V.D.

5) $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{1}{4x^2-1} = -\infty$ La funzione è razionale fratta ed è definita nel dominio $A = R-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. Il punto $x_0 = \frac{1}{2}$ è di accumulazione a destra ed a sinistra per A. Per la sussistenza del limite deve essere soddisfatta la seguente proposizione:

$\forall M>0,\ \exists I_M^-\left(\frac{1}{2}\right): x\in I_M^-\left(\frac{1}{2}\right)\cap A \Rightarrow f(x) < -M$

Sia dunque M>0 e discutiamo la disequazione $f(x) < -M$, cioè $\frac{1}{4x^2-1} < -M$.

Poiché siamo interessati a determinare un intorno sinistro del punto $x_0 = \frac{1}{2}$ legato ad M in cui sia soddisfatta la proposizione enunciata limitiamo le nostre elaborazioni per x nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ in cui risulta $4x^2 - 1 < 0$, quindi anche $\frac{1}{4x^2-1} < 0$. La disuguaglianza $\frac{1}{4x^2-1} < -M$ si può trasformare passando ai reciproci dei due membri e cambiando il verso perché i due membri sono concordi, quindi

$4x^2 - 1 > -\frac{1}{M}$, da cui $4x^2 > 1 - \frac{1}{M}$.

A questo punto osserviamo che se abbiamo scelto $0 < M < 1$, risulta $\frac{1}{M} > 1$, da cui $1 - \frac{1}{M} < 0$, e perciò nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ è vero che $4x^2 > 1 - \frac{1}{M}$ giacché $4x^2 \geq 0$; pertanto possiamo assumere come intorno sinistro di $x_0 = \frac{1}{2}$ proprio $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ per la verifica del limite. Se invece è stato scelto $M \geq 1$ allora sussiste la doppia disuguaglianza $0 \leq 1 - \frac{1}{M} < 1$ e la disequazione $4x^2 > 1 - \frac{1}{M}$, che si può scrivere nella forma equivalente $x^2 > \frac{1}{4} - \frac{1}{4M}$, è soddisfatta per i valori reali $\left(x < -\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4M}}\right) \vee \left(x > \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4M}}\right)$. Ora, evidentemente sussiste la disuguaglianza $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4M}} < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, quindi nell'intervallo $\left]\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4M}};\frac{1}{2}\right[$, che è un particolare intorno sinistro del punto $x_0 = \frac{1}{2}$, è soddisfatta la disuguaglianza prevista dalla definizione di limite in esame. C.V.D.