Limiti delle forme 0/0, ∞/∞, λ/0, ∞ - ∞, 1^{∞}

Applicazione dei limiti notevoli

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3x^2+x^3-3}=\frac{0}{0}$ R: $\frac{1}{3}$

2) Determinare il valore del parametro reale k affinché il seguente limite abbia valore finito diverso da zero:

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x^3+2x^2+k}$. R: k=-45; $\frac{6}{13}$

3) $\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-3)}{x^2-9}=\frac{\infty}{0}$ R: $-\infty$

4) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{\frac{2\ln x-1}{32\ln x+1}}=\frac{\infty}{\infty}$ R: $\frac{1}{2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{3^{4x}-1}{\log_3(1-3x)}=\frac{0}{0}$ R: $-\frac{4}{3}\ln^2(3)$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{senx}-1}{tgx}=\frac{0}{0}$ R: $\ln(2)$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{17senx+12x\cos x}{tg(2014x)}=\frac{0}{0}$ R: $\frac{29}{2014}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{senx-tgx}{x\cdot(\cos^2 x-1)}=\frac{0}{0}$ R: $\frac{1}{2}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-5sen(8x)}{arctg(5x)+arcsen(10x)}=\frac{0}{0}$ R: $-\frac{12}{5}$

10) $\lim_{x\to \alpha}\frac{senx-sen\alpha}{tgx-tg\alpha}=\frac{0}{0}$ R: $\cos^3\alpha$

11) $\lim_{x\to \alpha}\frac{senx-sen\alpha}{\cos x-\cos\alpha}=\frac{0}{0}$ R: $-\cot g\alpha$

12) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{senx-\cos(2x)}{6x-\pi}=\frac{0}{0}$ R: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

13) $\lim_{x\to +\infty}\frac{arctgx-\frac{\pi}{2}}{x-senx}=\frac{0}{\infty}$ R:0

14) $\lim_{x\to +\infty}\log_2(2x^2+x+1)-\log_2(3x^2+3x+1)=\infty-\infty$ R: $\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2 x+11\cos x-15}{xsen(6x)}=\frac{0}{0}$ R: $-\frac{19}{12}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x-x^2}-1}{x^2-4}=\frac{0}{0}$ R: $-\frac{1}{2}$

17) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2-x}-1}=\frac{0}{0}$ R: 2

18) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\sqrt{1-\cos x}-1}=\frac{0}{0}$ R: 4

19) $\lim_{x\to -\infty}\frac{\ln\left(x^2+3x+5\right)}{\ln\left(2x^2+x+1\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$ R: 1

20) $\lim_{x\to 0}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$ R: $\nexists$

21) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\cos x\right)^{tgx}=0^{\infty}$ R: 0^{+}

Soluzione

1) Per lo studio del limite si devono scomporre in fattori i polinomi presenti al numeratore e al denominatore. Si ha

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3x^2+x^3-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+4x+4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{3}$$

2) Osservato che il numeratore della frazione si annulla nel punto x=3, con x=3 radice semplice, per conseguire l'obiettivo è necessario che k abbia valore tale da rendere x=3 anche radice semplice del denominatore.

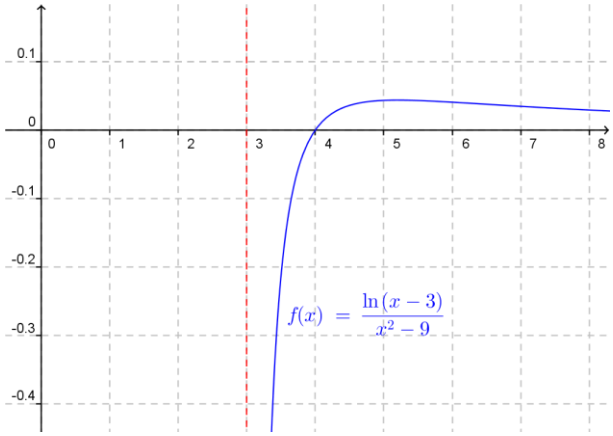
$D(3)=3^3+2\cdot 3^2+k=45+k=0$, dunque deve essere k=-45.

Con il valore trovato risulta

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x^3+2x^2-45}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(x^2+5x+15\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x+3)}{x^2+5x+15}=\frac{18}{39}=\frac{6}{13}$$

3) $\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-3)}{x^2-9}=\frac{\infty}{0}$

Osserviamo che $\lim_{x\to 3^+}\ln(x-3)=-\infty$ e che il polinomio x^2-9 assume valori positivi per (x<-3)$\vee$(x >3). Dunque si ha



$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-3)}{x^2-9}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$$

4) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{\frac{2\ln x-1}{32\ln x+1}}=\frac{\infty}{\infty}$

Osserviamo che $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ e ponendo $\ln x=y$ si può scrivere

$$\lim_{y\to-\infty}\sqrt[4]{\frac{2y-1}{32y+1}}=\lim_{y\to-\infty}\sqrt[4]{\frac{y\left(2-\frac{1}{y}\right)}{y\left(32+\frac{1}{y}\right)}}=\lim_{y\to-\infty}\sqrt[4]{\frac{2-\frac{1}{y}}{32+\frac{1}{y}}}=\sqrt[4]{\frac{2}{32}}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{3^{4x}-1}{\log_3(1-3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{-3x}{\log_3(1-3x)}\cdot\frac{4}{-3}=\lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{t}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_3(1+y)}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=$

$\ln(3)\cdot\ln(3)\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}\ln^2(3)$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{senx}-1}{tgx}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{senx}-1}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{senx}-1}{senx}\cdot\frac{senx}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{senx}-1}{senx}\cdot senx\cdot\frac{\cos x}{senx}=\lim_{y\to 0}\frac{2^{y}-1}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=$$
$$\ln(2)\cdot 1=\ln(2)$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{17senx+12x\cos x}{tg(2014x)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{17senx+12x\cos x}{tg(2014x)}=\lim_{x\to 0}\left(17\frac{senx}{x}+12\frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}}\right)\cdot\frac{2014x}{tg(2014x)}\cdot\frac{1}{2014}=$$
$$(17\cdot 1+12\cdot 1)\cdot 1\cdot\frac{1}{2014}=\frac{29}{2014}$$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{senx-tgx}{x\cdot(\cos^2 x-1)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx-tgx}{x\cdot(\cos^2 x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x\cdot(\cos^2 x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(\cos x-1)}}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{(\cos x-1)}(\cos x+1)}=$$
$$1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-5sen(8x)}{arctg(5x)+arcsen(10x)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-5sen(8x)}{arctg(5x)+arcsen(10x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}-5\frac{sen(8x)}{8x}\cdot 8}{\frac{arctg(5x)}{5x}\cdot 5+\frac{arcsen(10x)}{10x}\cdot 10}=\frac{4-5\cdot 1\cdot 8}{1\cdot 5+1\cdot 10}=-\frac{12}{5}$$

10) $\lim_{x\to\alpha}\frac{senx-sen\alpha}{\frac{senx}{\cos x}-\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}=\lim_{x\to\alpha}\frac{senx-sen\alpha}{\frac{\cos\alpha\cdot senx-sen\alpha\cos x}{\cos\alpha\cos x}}=\lim_{x\to\alpha}\cos\alpha\cos x\cdot$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{senx-sen\alpha}{\cos\alpha\cdot senx-sen\alpha\cos x}=\cos^2\alpha\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sen(t+\alpha)-sen\alpha}{\cos\alpha\cdot sen(t+\alpha)-sen\alpha\cos(t+\alpha)}=\cos^2\alpha\cdot$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{sent\cdot\cos\alpha+\cos t\cdot sen\alpha-sen\alpha}{\cos\alpha\cdot(sent\cdot\cos\alpha+\cos t\cdot sen\alpha)-sen\alpha(\cos t\cdot\cos\alpha-sent\cdot sen\alpha)}=\cos^2\alpha\cdot$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{sent\cdot\cos\alpha+\cos t\cdot sen\alpha-sen\alpha}{\cos^2\alpha\cdot sent+\cancel{\cos\alpha sen\alpha\cdot\cos t}-\cancel{\cos\alpha sen\alpha\cdot\cos t}+sen^2\alpha\cdot sent}=\cos^2\alpha\cdot$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{sent\cdot\cos\alpha+\cos t\cdot sen\alpha-sen\alpha}{\cos^2\alpha\cdot sent+\cancel{\cos\alpha sen\alpha\cdot\cos t}-\cancel{\cos\alpha sen\alpha\cdot\cos t}+sen^2\alpha\cdot sent}=$$

$$\cos^2\alpha\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sent\cdot\cos\alpha+(\cos t-1)\cdot sen\alpha}{(cos^2\alpha+sen^2\alpha)\cdot sent}=\cos^2\alpha\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{sent}{t}\cdot\cos\alpha+\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)\cdot sen\alpha}{1\cdot\frac{sent}{t}}=$$

$$\cos^2\alpha\cdot\frac{1\cdot\cos\alpha+0\cdot sen\alpha}{1\cdot 1}=\cos^3\alpha$$

11) $\lim_{x\to\alpha}\frac{senx-sen\alpha}{\cos x-\cos\alpha}=\frac{0}{0}$ (Porre $x-\alpha=t$ e studiare per t→0). Si ottiene come risultato: -cotgα.

12) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx-\cos(2x)}{6x-\pi}=\frac{0}{0}$ Poniamo $x-\frac{\pi}{6}=t$ e procediamo per $t\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{senx-\cos(2x)}{6x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{sen\left(t+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)}{6t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{sent\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos t\cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)-\left[\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\text{sen}(2t)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{6t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}sent+\cos t-\cos(2t)+\sqrt{3}\,\text{sen}(2t)}{12t}=\lim_{t\to 0}\sqrt{3}\left(\frac{sent}{12t}+\frac{\text{sen}(2t)}{12t}\right)+\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos(2t)}{12t}=$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)+\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-2\cos^2 t+1}{12t}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\lim_{t\to 0}\frac{2\cos^2 t-\cos t-1}{12t}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}-\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1)(2\cos t+1)}{12t}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2\cos t+1}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}-0\cdot\frac{2+1}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

13) $\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx-\frac{\pi}{2}}{x-senx}=\frac{0}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx-\frac{\pi}{2}}{x-senx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx-\frac{\pi}{2}}{x\left(1-\frac{senx}{x}\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{+\infty(1-0)}=\frac{0}{+\infty}=0$$

14) $\lim_{x\to+\infty}\log_2(2x^2+x+1)-\log_2(3x^2+3x+1)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2(2x^2+x+1)-\log_2(3x^2+3x+1)=\lim_{x\to+\infty}\log_2\left(\frac{2x^2+x+1}{3x^2+3x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2 x+11\cos x-15}{x\,sen(6x)}=\frac{0}{0}$ Si procede scomponendo in fattori il numeratore.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2 x+11\cos x-15}{x\,sen(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(4\cos x+15)}{x\,sen(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{6x}{sen(6x)}\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4\cos x+15)}{6}=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{19}{6}=-\frac{19}{12}$$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x-x^2}-1}{x^2-4}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{2x-x^2}-1}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x(2-x)}-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}\cdot\frac{-x}{(x+2)}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

17) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2-x}-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\left(1+\left(x^2-x\right)\right)^{\frac{1}{2}}-1}=2$$

18) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\sqrt{1-\cos x}-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\sqrt{1-\cos x}-1}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}-1}{-\cos x}\cdot}\cdot\left(-\frac{2x-\pi}{\cos x}\right)=2\cdot\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$$

(cambiamo la variabile ponendo $\pi-2x=t$, quindi $t\to 0$)

$$2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\frac{t}{2}}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}=4$$

19) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+3x+5\right)}{\ln\left(2x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\ln\left(|x|\right)+\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{2\ln\left(|x|\right)+\ln\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cancel{\ln(|x|)}\left(2+\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\ln(|x|)}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{\ln(|x|)}\left(2+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(|x|)}\right)}=$$

$$\left(2+\frac{\ln(1)}{+\infty}\right)\cdot\frac{1}{2+\frac{\ln(2)}{+\infty}}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

20) $\lim_{x\to0}(x+1)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}(x+1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\ln\left((x+1)^{\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

A questo punto osserviamo che x=0 è di accumulazione a destra e a sinistra per il dominio di definizione della funzione e per quanto concerne l'espressione all'esponente occorre studiare i limiti laterali. Risulta:

$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{1}{0^-}\cdot1=-\infty$, quindi $\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}}=e^{-\infty}=0^+$;

$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{1}{0^+}\cdot1=+\infty$, quindi $\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$

Si conclude che **il limite in esame non esiste**. Nel punto x=0 la funzione presenta una discontinuità di seconda specie.

21) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{tgx}$ Osserviamo che la base di una potenza con esponente reale deve essere positiva, quindi cosx>0, perciò $x=\frac{\pi}{2}$ è di accumulazione solo a sinistra. Ciò premesso possiamo scrivere

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\cos x)^{tgx}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}e^{\ln(\cos x)^{tgx}}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}e^{tgx\ln(\cos x)}=e^{+\infty\cdot\ln\left(0^+\right)}=e^{+\infty\cdot(-\infty)}=e^{-\infty}=0^+$$