

Sulla verifica della definizione di limite

Per una guida alla verifica dei limiti proposti si consiglia al lettore la consultazione del seguente documento [Esplicitazioni della definizione di limite](http://www.matematicaescuola.it), presente su www.matematicaescuola.it.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{|x-1|} = +\infty$$

La funzione $f(x) = \frac{3}{|x-1|}$ è definita nell'insieme $A = \mathbb{R} - \{1\}$ e dobbiamo provare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : |x-1| < \delta_M \wedge x \neq 1 \wedge x \in A \Rightarrow f(x) > M. \quad (1.1)$$

Sia dunque $M > 0$ e studiamo la disuguaglianza

$$\frac{3}{|x-1|} > M, \text{ che con } x \in A \text{ si può scrivere nella forma equivalente } |x-1| < \frac{3}{M}, \text{ che è soddisfatta}$$

per i valori reali x tali che $1 - \frac{3}{M} < x < 1 + \frac{3}{M}$ e $x \neq 1$.

Riconosciamo immediatamente che assumendo $\delta_M = \frac{3}{M}$ risulta soddisfatta la proposizione (1.1). Il limite è verificato.

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è definita su tutto l'asse reale. Si deve provare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall M > 0, \exists \bar{x}_M \in \mathbb{R} : x > \bar{x}_M \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > M \quad (2.1)$$

Osserviamo che con $M > 0$ la disuguaglianza $e^x > M$ è verificata per ogni x reale tale che $x > \log M$; pertanto, assumendo $\bar{x}_M = \log M$ risulta essere soddisfatta la (2.1), quindi il limite è verificato.

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - x^2 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - x^2 = -\infty$$

Verifica del primo limite

La funzione polinomio $f(x) = 2x - x^2$ è definita su tutto l'asse reale. Affinché sussista il limite in oggetto si deve provare che si verifica la seguente proposizione

$$\forall M > 0, \exists \bar{x}_M \in \mathbb{R} : x > \bar{x}_M \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) < -M \quad (3.1)$$

Con $M > 0$ studiamo la disuguaglianza

$$2x - x^2 < -M, \text{ che scriviamo nella forma } x^2 - 2x - M > 0 \quad (3.2)$$

La disequazione di secondo grado (3.2) è soddisfatta dai valori reali di x tali che

$$(x < 1 - \sqrt{M+1}) \vee (x > 1 + \sqrt{M+1})$$

Pertanto, assumendo $\bar{x}_M = 1 + \sqrt{M+1}$ risulta essere soddisfatta la (3.1) e quindi il limite.

Verifica del secondo limite

Con i simboli introdotti si deve provare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall M > 0, \exists \bar{x}_M \in \mathbb{R} : x < \bar{x}_M \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) < -M \quad (3.3)$$

Con $M > 0$, la disuguaglianza da studiare è sempre la (3.2) ed abbiamo visto che essa è soddisfatta anche per $x < 1 - \sqrt{M+1}$, dunque assumendo $\bar{x}_M = 1 - \sqrt{M+1}$ possiamo concludere che è soddisfatta la proposizione (3.3), quindi il limite è verificato.

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -\infty$

La funzione logaritmica $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ è definita nell'insieme $A =]-1; +\infty[$. Il limite in oggetto sussiste se vale la seguente proposizione

$$\forall M > 0, \exists \bar{x}_M \in \mathbb{R} : x > \bar{x}_M \wedge x \in A \Rightarrow f(x) < -M. \quad (4.1)$$

Con $M > 0$ studiamo la disequazione

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < -M, \text{ equivalente alla disequazione}$$

$$x+1 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-M}, \text{ soddisfatta dai valori reali } x \text{ tali che } x > 2^M - 1.$$

Osservato che $2^M - 1 > -1$ per ogni M reale, possiamo concludere che con $\bar{x}_M = 2^M - 1$ è soddisfatta la (4.1), quindi il limite sussiste.

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 0^+$

La funzione $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ è definita nel dominio $A = [0; +\infty[$ e si deve provare che sussiste la seguente proposizione

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \in R \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x}_\varepsilon \in R : x > \bar{x}_\varepsilon \wedge \\ x \in A \Rightarrow 0 < f(x) < \varepsilon \end{array} \right) \quad (5.1)$$

Studiamo la doppia disuguaglianza

$$0 < \frac{3}{\sqrt{x}+1} < \varepsilon$$

Osserviamo che $\forall x \in A$ è senz'altro verificata la condizione $\frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0$; affrontiamo dunque, nel dominio di definizione della funzione la seconda disuguaglianza

$$\frac{3}{\sqrt{x}+1} < \varepsilon, \text{ da cui } \sqrt{x}+1 > \frac{3}{\varepsilon} \rightarrow \sqrt{x} > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Notiamo che se $\varepsilon > 3$ la disuguaglianza in esame è verificata da ogni $x \in A$, quindi è verificata la (5.1). Supponiamo dunque che sia $0 < \varepsilon \leq 3$. In questa ipotesi possiamo elevare al quadrato i due membri della disuguaglianza ottenendo

$$x > \left(\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2; \text{ assumendo } \bar{x}_\varepsilon = \left(\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \text{ si evince che ogni } x > \bar{x}_\varepsilon \text{ appartiene al dominio } A$$

di definizione della funzione e che per detti valori della variabile è soddisfatta la proposizione (5.1). Concludiamo che il limite in oggetto è verificato.

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x} = 1^-$

La funzione in oggetto è definita nell'insieme $A =]0; +\infty[- \{1\}$. Per provare che sussiste il limite indicato si deve provare che è verificata la seguente proposizione

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x}_\varepsilon \in R : x > \bar{x}_\varepsilon \wedge x \in A \Rightarrow 1 - \varepsilon < f(x) < 1 \quad (6.1)$$

Notiamo che la disuguaglianza

$$f(x) < 1 \text{ è la seguente } 1 - \frac{1}{\log_2 x} < 1, \text{ che è senz'altro verificata per ogni } x > 1; \text{ occupiamoci}$$

quindi dell'altra disuguaglianza

$$1 - \varepsilon < f(x), \text{ cioè della disuguaglianza}$$

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{\log_2 x}, \text{ che diventa } \frac{1}{\log_2 x} < \varepsilon.$$

Considerato che siamo interessati a studiare il comportamento della funzione per $x \rightarrow +\infty$ non è limitativo affrontare la disuguaglianza per $x > 1$. Nell'intervallo $]1; +\infty[$ la disuguaglianza è equivalente alla seguente

$\log_2 x > \frac{1}{\varepsilon}$, che è soddisfatta dai valori reali x tali che $x > 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ e risulta $2^{\frac{1}{\varepsilon}} > 1$. Pertanto,

preso $\bar{x}_\varepsilon = 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ possiamo affermare che per ogni $x > \bar{x}_\varepsilon$, quindi nell'intorno

$I(+\infty) = \left] 2^{\frac{1}{\varepsilon}}; +\infty \right[$, è soddisfatta la (6.1), dunque è soddisfatta la definizione di limite.