Esplicitazioni formali della definizione di limite

Considerato l'insieme numerico $A \subseteq R$ e la funzione $f: A \to R$, se x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di definizione della funzione, in simboli $x_0 \in D_r(A)$, ed $l \in R$, sussiste la seguente definizione di limite

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon(x_0): \\ x \in \left(I_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}\right) \cap A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{pmatrix}$$

Se $l = +\infty$ la definizione di limite si può esprimere nella forma seguente

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall M > 0, \exists I_M(x_0): \\ x \in \left(I_M(x_0) - \{x_0\}\right) \cap A \Rightarrow f(x) > M \end{pmatrix}$$

Se $l = -\infty$ la definizione di limite si può esprimere nella forma seguente

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall M > 0, \exists I_M(x_0): \\ x \in \left(I_M(x_0) - \{x_0\}\right) \cap A \Rightarrow f(x) < -M \end{pmatrix}$$

Di seguito esplicitiamo le diverse definizioni distinguendo i casi $x_0 \in R$, $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$; le stesse consentono di verificare operativamente la sussistenza di un limite.

1) $$\begin{pmatrix} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R \\ x_0 \in R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0: |x - x_0| < \delta_\varepsilon \wedge x \neq x_0 \\ \wedge x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \\ x_0 \in R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall M > 0, \exists \delta_M > 0: |x - x_0| < \delta_M \wedge x \neq x_0 \\ \wedge x \in A \Rightarrow f(x) > M \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \\ x_0 \in R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall M > 0, \exists \delta_M > 0: |x - x_0| < \delta_M \wedge x \neq x_0 \\ \wedge x \in A \Rightarrow f(x) < -M \end{pmatrix}$$

4) $$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in R\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x}_\varepsilon \in R: x > \bar{x}_\varepsilon \wedge \\ x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{pmatrix}$$

5) $$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall M > 0, \exists \bar{x}_M \in R: x > \bar{x}_M \wedge \\ x \in A \Rightarrow f(x) < -M \end{pmatrix}$$

6) $$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall M > 0, \exists \bar{x}_M \in R: x > \bar{x}_M \wedge \\ x \in A \Rightarrow f(x) > M \end{pmatrix}$$

7) $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=l\in R\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}_\varepsilon\in R: x<\bar{x}_\varepsilon\wedge\\ x\in A\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\end{pmatrix}$

8) $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall M>0,\exists\bar{x}_M\in R: x<\bar{x}_M\wedge\\ x\in A\Rightarrow f(x)<-M\end{pmatrix}$

9) $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall M>0,\exists\bar{x}_M\in R: x<\bar{x}_M\wedge\\ x\in A\Rightarrow f(x)>M\end{pmatrix}$

Le proposizioni precedenti vanno opportunamente modificate allorché si è interessati a studiare se il valore del limite tende ad un numero reale per difetto o per eccesso, oppure si deve studiare il comportamento della funzione in un intorno destro o sinistro del punto reale x_0. Riportiamo di seguito le esplicitazioni nei diversi casi.

10) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0} f(x)=l^+\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:|x-x_0|<\delta_\varepsilon\wedge x\neq x_0\\ \wedge x\in A\Rightarrow l<f(x)<l+\varepsilon\end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0} f(x)=l^-\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:|x-x_0|<\delta_\varepsilon\wedge x\neq x_0\\ \wedge x\in A\Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l\end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon\\ \wedge x\in A\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l^+\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon\\ \wedge x\in A\Rightarrow l<f(x)<l+\varepsilon\end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l^-\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon\\ \wedge x\in A\Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l\end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:x_0-\delta_\varepsilon<x<x_0\\ \wedge x\in A\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l^+\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:x_0-\delta_\varepsilon<x<x_0\\ \wedge x\in A\Rightarrow l<f(x)<l+\varepsilon\end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l^-\in R\\ x_0\in R\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0:x_0-\delta_\varepsilon<x<x_0\\ \wedge x\in A\Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l\end{pmatrix}$

18) $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=l^{+}\in R\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}_{\varepsilon}\in R: x>\bar{x}_{\varepsilon}\wedge\\ x\in A\Rightarrow l<f(x)<l+\varepsilon\end{pmatrix}$

19) $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=l^{-}\in R\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}_{\varepsilon}\in R: x>\bar{x}_{\varepsilon}\wedge\\ x\in A\Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l\end{pmatrix}$

20) $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=l^{+}\in R\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}_{\varepsilon}\in R: x<\bar{x}_{\varepsilon}\wedge\\ x\in A\Rightarrow l<f(x)<l+\varepsilon\end{pmatrix}$

21) $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=l^{-}\in R\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}_{\varepsilon}\in R: x<\bar{x}_{\varepsilon}\wedge\\ x\in A\Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l\end{pmatrix}$