Esercitazione sui limiti della forma 0/0

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$=0

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{5}{4}$

4) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x+6}{x^2+x}$=-8

5) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+3x-4}=\frac{1}{10}$

6) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{4x^2-36}=\frac{1}{8}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^3-5x-6}=\frac{12}{19}$

8) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{3}{4}$

9) $\lim_{x\to \sqrt{2}}\frac{x^2-2}{2x-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

10) $\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2-x^2+1}{(x+1)^3}=+\infty$

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x^3-4x}=0$

Risoluzione

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x}=\frac{0}{2}=0$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{5}{4}$

4) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x+6}{x^2+x}$

Si esegue la divisione esatta $(x^3+5x+6):(x+1)$ e si ottiene come quoziente $Q(x)=x^2-x+6$. Sussiste la scomposizione in fattori $x^3+5x+6=(x+1)(x^2-x+6)$. Procediamo con lo studio del limite.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x+6}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+6)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+6}{x}=\frac{(-1)^2-(-1)+6}{-1}=-8$$

5) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+3x-4}$

a. Si deve procedere alla razionalizzazione del numeratore moltiplicando numeratore e denominatore per $(x+\sqrt{x})$ al fine di far figurare al numeratore il fattore infinitesimo $(x-1)$.

b. Si scompone in fattori il trinomio al denominatore ottenendo: $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

Procediamo con lo studio del limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+4)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)(x+4)(x+\sqrt{x})}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+4)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+4)(x+\sqrt{x})}=\frac{1}{5\cdot 2}=\frac{1}{10}$$

6) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{4x^2-36}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)}{4(x^2-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)}{4(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x}{4(x-3)}=\frac{-3}{-24}=\frac{1}{8}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^3-5x-6}$

Ricordiamo che sussiste l'uguaglianza $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; inoltre si scompone il denominatore eseguendo la divisione $(2x^3-5x-6):(x-2)$ ottenendo il quoziente $Q(x)=2x^2+4x+3$.

Procediamo con lo studio del limite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^3-5x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{(x-2)(2x^2+4x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x^2+4x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2x^2+4x+3}=$$

$$\frac{4+4+4}{8+8+3}=\frac{12}{19}$$

8) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x+1)^2\cancel{(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}$$

9) $$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{2x-2\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2(x-\sqrt{2})}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

10) $$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2-x^2+1}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2-(x-1)(x+1)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1-x+1)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{2}{(x+1)^2}=$$

$$\frac{2}{0^+}=2(+\infty)=+\infty$$

11) $$\lim_{x\to 2}\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x+2\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x+2)(x+2\sqrt{x-1})}\cdot$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(2\sqrt{x-1})^2}{(x-2)}=\frac{1}{32}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(2\sqrt{x-1})^2}{(x-2)}=\frac{1}{32}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{(x-2)}=\frac{1}{32}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)}=$$

$$\frac{1}{32}\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)=\frac{1}{32}\cdot 0=0$$